MINISTERIO DE CULTURA Y EDUCACION
UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN JUAN
FACULTAD DE ARQUITECTURA, URBANISMO Y DISEÑO

CARRERA: DISEÑO INDUSTRIAL
ASIGNATURA: MATEMÁTICA APLICADA
UNIDAD Nº 1 - AÑO 2018
DERIVADAS Y DIFERENCIALES. APLICACIÓN

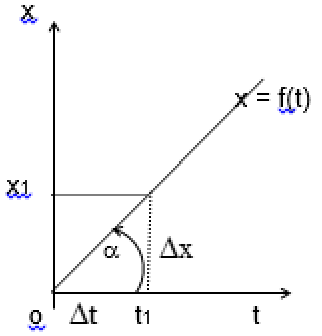
LA FUNCIÓN DERIVADA

INTRODUCCIÓN

En los siglos III y II a. C, los griegos trataban de resolver el problema de trazar una recta tangente a una curva, en un punto cualquiera de esta. Hubo soluciones particulares.
Recién en el siglo XVII, Gotfried Wilhelm Leibnitz, halló un método sistemático de validez general para solucionar el problema.
En forma independiente, hacia la misma época, Isaac Newton aplicó un método similar para el estudio de la velocidad instantánea de un móvil.
Ambos a fines de siglo, presentan por separado tangenciales descubrimientos, que marcan el inicio del “Cálculo infinitesimal” (diferencial).
Las técnicas ideadas por ellos, son hoy elementos básicos para el desarrollo de la ciencia y la tecnología. Así gracias al problema de la tangente, surgen los conceptos de Límite y Derivada, conceptos que permiten estudiar:

- El movimiento instantáneo.
- Las órbitas planetarias y satelitales.
- La descomposición de una sustancia radiactiva.
- El avance de las enfermedades infecciosas.
- En estructuras, el momento flector.
- Problemas de optimización
- La curvatura de figuras planas: circunferencia, etc.

Infinidad de movimientos presentan una autónoma variación de la velocidad. La gráfica correspondiente a dichos movimientos no es ya una línea recta.

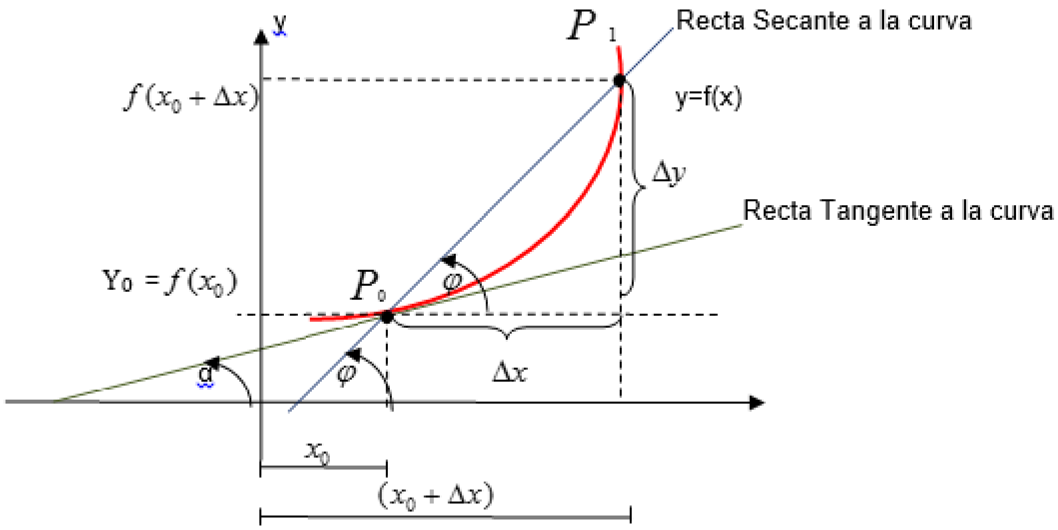


donde $v = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = m = cte$

x

El cálculo de la velocidad en cada instante debe hacerse recurriendo a nuestros conocimientos acerca de límites.

Sea entonces, la curva continua C, de esta función f(x) y supongamos que se desea trazar una recta tg a dicha curva en un punto P_0 de coordenadas (x_0 , y_0).



Consideramos una recta P_0 P_1 secante a la curva C, donde P_0 y P_1 son los puntos de intersección.

Cuando el punto P_1 se mueve acercándose a P_0 sobre la curva, también se mueve la secante girando alrededor de P_0. Se advierte que a medida que P_1 se aproxima a P_0 , la recta secante se acerca a una posición límite, y esta se transforma en tangente a la curva en P_0.

- La pendiente de la secante es:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

- En el gráfico observamos que:

$$\lim_{P1 \to Po} \varphi = \alpha \Rightarrow \lim_{P1 \to Po} \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \alpha$$

- Entonces, la pendiente de la recta tangente en x_0 será:

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim_{P1 \to Po} \operatorname{tg} \varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Siempre que tal limite exista, dicha pendiente se llama derivada de la f(x) en x = x_0 y denotamos f´(x_0),

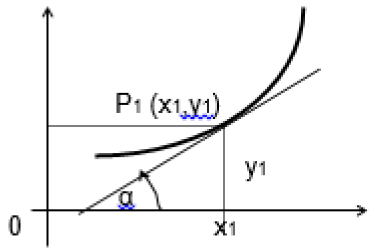
Definición de derivada de f(x) en un punto:

Si $\exists$ $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = y'$

$f'(x_0)$ es la derivada de f(x) en $x = x_0$, y se calcula como el limite cuando delta x tiende a cero($\Delta x \to 0$) de la razón incremental de la función ($\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$) dividido en el incremento de la variable independiente x (Δx) y geométricamente representa la pendiente de la recta tg a la curva representativa de f(x) en (x_0, y_0), siendo $y_0 = f(x_0)$.

EJEMPLOS APLICADOS AL CONCEPTO
ECUACIÓN DE LA RECTA TANGENTE A UNA CURVA PLANA EN UN PUNTO.

Dada una curva de ecuación y = f(x), derivable en el punto P_1 de abscisa x_1 se trata de escribir la ecuación de la recta tangente a la curva en dicho punto.



La ecuación de una recta cualquiera que pasa por el punto $P_1(x_1, y_1)$, es como sabemos por geometría analítica: $y - y_1 = m(x - x_1)$ (1)

Obteniéndose una recta para cada valor que se asigna a "m". Pero **"m" es la pendiente** o coeficiente angular de la recta; entonces vemos que para que ésta coincida con la tangente, debe ser:

$$\text{tg}\ \alpha = m = f'(x_1)$$

Esto es el coeficiente angular de la recta(1) y según lo visto en la interpretación geométrica de derivada debe ser igual a la derivada de la función en x_1. En ese caso queda:

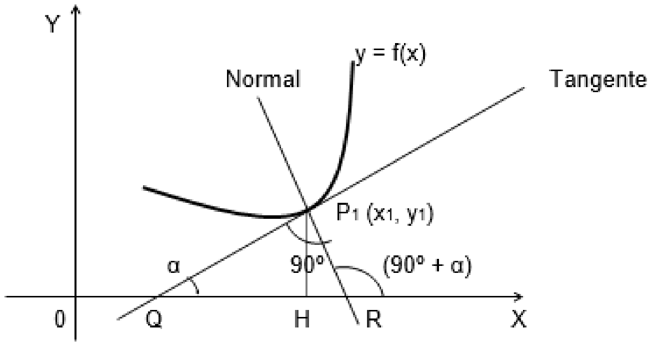
Ecuación de la recta tangente(1) $\boxed{y - y_1 = f'_{(x_1)}(x - x_1)}$

Nota: Cuando la derivada es infinita en x_1 la tangente es paralela el eje "y". En ese caso la ecuación de la tg es: $x = x_1$

Ejemplo 1:
Determinar la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = f(x) = x^2$ en el punto de la abscisa $x_1 = 4$.
Se tiene $y_1 = f(x_1) = f(4) = 16$, de modo que el punto es $P_1(x_1, y_1) = P_1(4,16)$.
Como la función derivada es $f'(x) = 2x$, tenemos $m = f'(4) = 2.4 = 8$; luego la ecuación de la tangente será: $y - 16 = 8(x-4)$, o bien $y = 8x - 16$

ECUACIÓN DE LA RECTA NORMAL A UNA CURVA PLANA EN UN PUNTO

Definición: Se define normal a la curva en un punto "P_1", a la recta que pasando por éste es perpendicular a la tangente trazada por el punto "P_1".



Como la normal pasa por P_1 (x_1,y_1), y tiene una ecuación de forma: $y - y_1 = m_1(x - x_1)$, y como la condición de perpendicularidad de dos rectas, es que sus pendientes sean recíprocas y de signos contrarios, tenemos : $m_1 = -\frac{1}{m_2} = -\frac{1}{f'_{(x)}}$. Por lo tanto (siempre que $f'(x_1) \neq 0$) :

Ecuación de la recta normal(2) $\boxed{y - y_1 = -\frac{1}{f'_{(X_1)}}(x - x_1)}$

Si $f'(x) = 0$ no se puede aplicar (2), pero en este caso la tangente es paralela al eje "x". Entonces la normal será paralela al eje "y"; y su ecuación vendrá dada por $x = x_1$

Ejemplo1: Hallar la pendiente de la recta tangente a la curva de la ecuación $y= x^3-1$, en el punto de la abscisa $x = x_0= 2$.

Solución:

a) Calculamos $f(x_0) \rightarrow x_0= 2 \left\{ \begin{array}{l} f_{(2)} = 2^3 - 1 = 7 = y_0 \\ (2,7) \in f \end{array} \right.$

b) Calculamos $f(x_0 + \Delta x) \rightarrow f(2 + \Delta x) = (2 + \Delta x)^3 - 1 = \Delta x^3 + 6\Delta x^2 + 12\Delta x + 7$

c) Hallamos la diferencia: $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \rightarrow f(2 + \Delta x) - f(2) = \Delta x^3 + 6\Delta x^2 + 12\Delta x$

d) Determinamos el cociente: $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta x^3 + 6\Delta x^2 + 12\Delta x}{\Delta x}$ Distribuyendo el denominador se obtiene: $\frac{\Delta x^3}{\Delta x} + \frac{6\Delta x^2}{\Delta x} + \frac{12\Delta x}{\Delta x}$; simplificando términos: $\Delta x^2 + 6\Delta x + 12$

e) Calculamos $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (\Delta x^2 + 6\Delta x + 12) = 12 = f'(2)$

f) Reemplazando los valores encontrados en la ecuación de la recta por un punto y pendiente conocida:

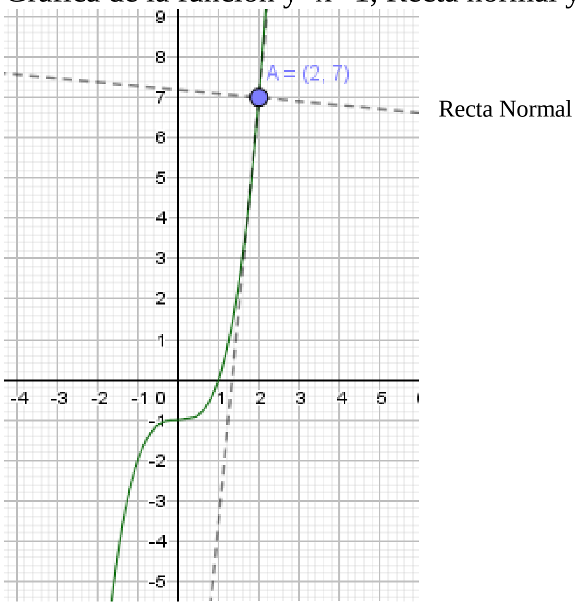
Recordar la ecuación de la recta por un punto y pendiente conocida es $y - y_0 = f'_{(x_0)}(x - x_0)$

$y - 7 = 12\,(x-2) \rightarrow y = 12x - 24 + 7$

$y = 12x - 17$ Ecuación de la recta tangente a la curva por P (2,7)

Si queremos trazar una recta normal por el mismo punto, recordar que la pendiente de la recta normal (m_2) debe cumplir la siguiente condición: $m_1 = \dfrac{-1}{m_2}$, y la ecuación de la recta normal es: $y = -1/12 \,.\, x + 43/6$

Gráfica de la función $y=x^3-1$, Recta normal y tangente al punto (2;7)



Ejemplo 2:

Determinar la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = f(x) = x^2$ en el punto de la abscisa $x_1 = 4$.

Se tiene $y_1 = f(x_1) = f(4) = 16$, de modo que el punto es $P_1(x_1, y_1) = P_1(4,16)$.

Como la función derivada es $f'(x) = 2x$, tenemos $m = f'(4) = 2.4 = 8$; luego la ecuación de la tangente será: $y - 16 = 8\,(x-4)$, o bien $y = 8x - 16$ Ejemplo 2:

Hallar la ecuación de la normal a la parábola $y = x^2$ en el punto $x_1 = 4$

En el ejemplo 1, se obtuvo la ecuación de la recta tangente: $y - 16 = 8\,(x - 4)$; donde la pendiente $m_1 = f'_{(x_1)} = 8$, reemplazando en la ecuación de la recta normal a una curva, se tiene:

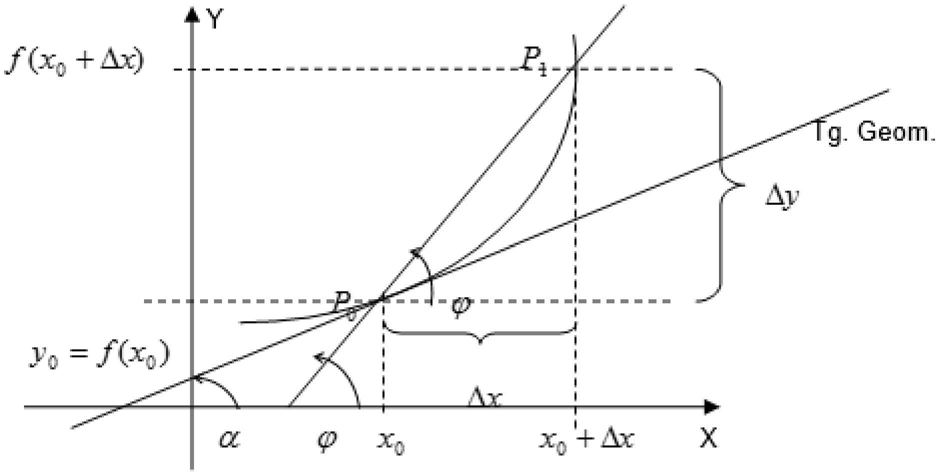
$y - 16 = -\dfrac{1}{8}(x - 4)$ que es la ecuación de la recta normal a la curva en el punto P(4,16)

<u>FUNCIÓN DERIVADA:</u>

Si y = *f*(x) tiene derivada en cada punto de su dominio y hacemos corresponder a cada valor de x del dominio, la derivada de f(x), obtenemos una nueva función, llamada función derivada y la designamos por $f'(x)$ o bien y'

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = y' = f'_{(x)}$$

Interpretación geométrica de la derivada:



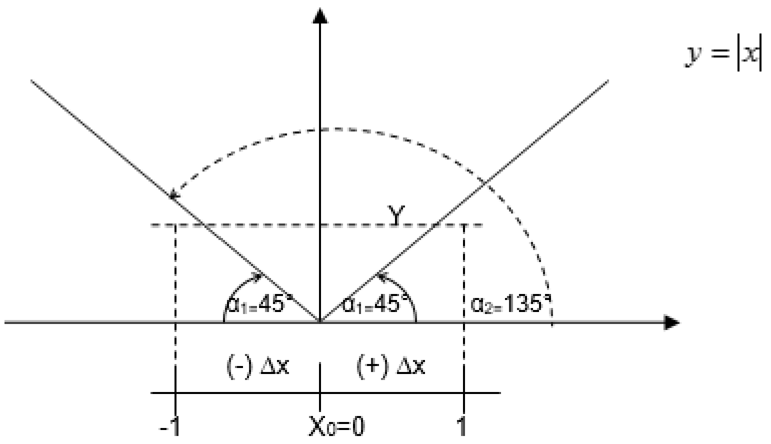
En el triángulo $\overset{\triangle}{P_0QP_1}$:

1) La razón incremental es: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\varphi$ (tangente trigonométrica);es la pendiente de la recta secante.
2) Cuando $P_1 \to P_0$ lo mas próximo que puede acercarse (tomamos límite cuando $\Delta x \to 0$); es decir: $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\alpha$
3) Y además $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = f'(x_0) = tg\alpha$

<u>CONCLUSIÓN:</u> LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO P_0 MIDE LA PENDIENTE DE LA RECTA TANGENTE GEOMÉTRICA A LA CURVA, EN DICHO PUNTO.

FUNCIONES DERIVABLES. DERIVABILIDAD Y CONTINUIDAD

Derivadas laterales: A veces, el cociente incremental $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tiene límites laterales distintos, según Δx tienda a cero por derecha o por izquierda.
Ejemplo: $y = |x|$



Las derivadas laterales en el punto P (0,0) son:

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg}\alpha_2 = \operatorname{tg}135^{\circ} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg}\alpha_1 = \operatorname{tg}45^{\circ} = \frac{1}{1} = 1$$

Como $\operatorname{tg}\alpha_1 \neq \operatorname{tg}\alpha_2 \Rightarrow \text{No Existe la derivada en } x = 0$

- “Una función derivable siempre es continua” Ej.: y = x^2
- “Una función continua no es siempre derivable” Ej.: y= $|x|$
- Una función es derivable si:

a) Matemáticamente: si las derivadas laterales son iguales.
b) Geométricamente; si existe tangente única”.

Nota: Si y = f(x) tiene derivada en cada punto de un intervalo (a;b) es derivable en (a;b).

TEOREMA: H) Si y = f(x) es derivable en $x = x_0$ implica que; T) f(x) es continua en $x = x_0$

Cálculo de las derivadas de las funciones elementales por definición

Pasos a seguir:

1) Se incrementa **x** en Δx, obteniéndose $f(x+\Delta x)$.
2) Se calcula $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$.
3) Se forma la razón incremental $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$
4) Se aplica límite cuando $\Delta x \to 0$

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Derivada de una constante

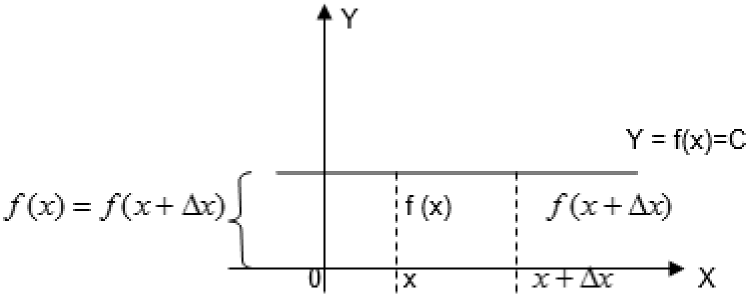
1) Si y =f(x) =c $\quad f(x+\Delta x) = c$.

2) $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = c - c = 0$.

3) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{0}{\Delta x} = 0$.

4) $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 0 = 0$.

Graficando



CONCLUSIÓN: Si $y = f(x) = C \Rightarrow y' = f'(x) = 0$

Derivada del producto de una constante por una función

Sea y =C·f(x) donde C = constante

1) $y + \Delta y = C.f(x+\Delta x)$.

2) $\Delta y = C\cdot f(x+\Delta x) - C.f(x) = C\left[f(x+\Delta x) - f(x)\right]$

3) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{C\cdot\left[f(x+\Delta x) - f(x)\right]}{\Delta x}$

4) $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = C\cdot\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\left[f(x+\Delta x) - f(x)\right]}{\Delta x} = C\cdot\underbrace{\lim\limits_{\Delta x \to 0}\left[\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right]}_{f'(x)}$

CONCLUSIÓN: Si $y = C.f(x) \Rightarrow y' = C\cdot f'(x)$

Derivada de la suma algebraica de un número finito de funciones.

Sea y= u(x) ± v(x) ± ………………. ± w(x), donde u, v, w son funciones derivables.

Aplicando el mismo procedimiento llegaremos a que:"La derivada de la suma algebraica de un número finito de funciones derivables, es igual a la suma algebraica de las derivadas de cada una de las funciones". (Lo postulado se demostrará en clase); o sea:

CONCLUSIÓN:

Si $y = u(x) \pm v(x) \pm \dots\dots\dots \pm w(x) \Rightarrow y' = u'(x) \pm v'(x) \pm \dots\dots\dots \pm w'(x)$

Derivada de la función identidad: y=x

1) Si y =f(x) =x $\quad f(x+\Delta x) = x + \Delta x$.

2) $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = x + \Delta x - x = \Delta x$.

3) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta x}{\Delta x} = 1$.

4) $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 1 = 1$.

CONCLUSIÓN: Si f(x) = $y = x \Rightarrow y' = 1$

5.3 Derivada de una función compuesta (o función de función)

Sea la función compuesta $y = f(x) = f[h(x)]$ donde y=f(u) siendo u=h(x), resulta

$y' = f'(x) = f'(u) \cdot h'(x)$, viene a ser la regla o fórmula para derivar una función compuesta.

Análogamente si: y= f(u) siendo u= h(v) y v= g(x), se tendrá:

$y' = f'(x) = f'(u) \cdot u'(v) \cdot v'(x)$ "Regla del corrimiento o de la cadena".

Ejemplo: $\ln^3 x = (\ln x)^3$, donde $y = u^3 = f(u)$,siendo $u = \ln x = h(x)$. Entonces aplicando

$y' = f'(x) = f'(u) \cdot h'(x)$, resulta $\Rightarrow y' = (u^3)' \cdot (\ln x)' = 3u^2 \cdot \frac{1}{x}$

Finalmente $y' = 3 \cdot (\ln x)^2 \cdot \frac{1}{x}$

Derivada de la función logarítmica: ln x.

Sea y= f(x)= ln x; se puede probar que $y' = \frac{1}{x}$

Generalizando: Si y =ln u(x), donde u(x) es una función derivable: $y' = \frac{1}{ux)} \cdot u'(x)$

Ejemplo:

$y = \ln(2x) \Rightarrow y' = \frac{1}{2x} \cdot 2 = \frac{1}{x}$

FUNCION	DERIVADA
Función compuesta $y = f(x) = f[h(x)]$	$y' = f'(x) = f'(h_{(x)}) \cdot h'(x)$
Producto de dos funciones y =u(x) · v(x),	$y' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
Cociente de dos funciones $y = \frac{u(x)}{v(x)}$	$y' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$
Derivada de una función potencial $y = f(x) = u_{(x)}{}^a$ (a = número real), con la condición de que además x>0.	$y' = a \cdot u_{(x)}{}^{a-1}(x) \cdot u'(x)$
Derivada de una función exponencial $y = a^{u(x)}$	$y' = a^{u(x)} \cdot \ln a \cdot u'(x)$
Derivada de una función logarítmica $y = \ln U(x)$	$y' = \frac{1}{x}$
Derivada de una función logarítmica	$y' = \frac{1}{U(x)} . U'(x)$
Derivada de una función potencial exponencial $y = u(x)^{V(x)}$	$y' = u(x)^{V(x)} \cdot \ln u(x) \cdot v'(x) + v(x) \cdot u(x)^{V(x)-1} \cdot u'(x)$
Derivadas de funciones circulares $y = senx$; $y = sen\, u_{(x)}$ $y = \cos x$; $y = \cos u_{(x)}$ $y = tg\, x$; $y = tg\, u_{(x)}$;	Derivada $y' = \cos x$; $y' = \cos u_{(x)} \cdot u'_{(x)}$ $y' = -sen\, x$; $y' = -sen\, u_{(x)} . u'_{(x)}$ $y' = \sec^2 x$; $y' = \sec^2 u_{(x)} . u'_{(x)}$

Derivada de un producto de dos funciones

Ejemplo:

$y = x^3 \cdot \ln x^5$

$y' = 3x^2 \cdot \ln x^5 + x^3 \cdot \frac{1}{x^5} \cdot 5x^4 = 3x^2 \cdot \ln x^5 + 5x^2$

Derivada de un cociente de dos funciones

Ejemplo: $y = \frac{4x^5}{\ln x^2} \Rightarrow y' = \frac{20x^4 \cdot \ln x^2 - 4x^5 \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x}{[\ln x^2]^2}$

Derivada de la función potencial

Ejemplo: $y = \ln^5 x^3 = (\ln x^3)^5 \Rightarrow y' = 5(\ln x^3)^4 \cdot \frac{1}{x^3} \cdot 3x^2$

Derivada de la función potencial-exponencial.

Derivada de las funciones circulares.

Ejemplo:

$y = sen 3x \Rightarrow y' = \cos 3x \cdot 3$

Ejemplo:

$y = \cos \frac{1}{5} x$, entonces $y' = -sen \frac{1}{5} x \cdot \frac{1}{5}$

NOTA: La derivada de las restantes funciones trigonométricas **tg x**, **cot x**, **sec x**, **cosec** x, se obtienen en base a la derivada de **sen x** y **cos x.**

- $y = tg\, x \Rightarrow y' = ?$

  $y = tgx = \frac{sen\, x}{\cos x}$ (Se deriva como cociente)

  $y' = \frac{\cos x \cdot \cos x - sen\, x \cdot (-sen\, x)}{\cos x}$

  $y' = \frac{\cos^2 x + sen^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$

  $y' = \sec^2 x$

- $y = \cot x \Rightarrow y' = -\cos ec^2 x$
- $y = \sec x \Rightarrow y' = tgx \cdot \sec x$
- $y = \cos ec\, x \Rightarrow y' = -\cot x \cdot \cos ec\, x$

Derivadas sucesivas

Supongamos que y=f(x) es derivable en $[a;b]$; o sea $f^{'}(x)$ también es una función de x.
Si derivamos $f^{'}(x)$, obtendremos la derivada segunda de f(x). Es decir que la derivada de la primera, se llama derivada segunda:

$$y^{''}(x) = f^{''}(x)$$

La cual se lee "derivada segunda, respecto a **x** dos veces." A su vez la $f^{''}(x)$ es una función de **x** que en general puede derivarse nuevamente, obteniéndose así la derivada tercera que se denota:

$$y^{'''}(x) = f^{'''}(x)$$

<u>En general</u>: La derivada de la función de orden **a** se llama <u>derivada enésima</u> de la función f(x) y se denota por:

$$y^{(n)}(x) = f^{(n)}(x)$$

Ejemplo:

Si $y = \sqrt{x^2+1} = (x^2+1)^{1/2}$ ¿Cuál es $y^{''} = ?$

$$y^{'} = \underbrace{\frac{1}{2}(x^2+1)^{-1/2}}_{u}\cdot\underbrace{2x}_{v} \Rightarrow y^{''} = \underbrace{\left[-\frac{1}{4}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}-1}\cdot 2x\right]}_{u'}2x + \underbrace{\frac{1}{2}(x^2+1)^{-1/2}}_{u}\cdot\underbrace{2}_{v'}$$

-CONCEPTO DE DIFERENCIAL

<u>Definición de diferencial</u>

Se lo define como **diferencial de la función f (x)**

$$dy = f'(x).\Delta x$$

Recordar la diferencia entre <u>Δ y</u> y <u>dy</u>

Δ y = f (x + Δ x) – f (x)
dy = f ´(x) · Δ x = f ´(x) · dx

como $dy \cong \Delta y$ (cuando $\Delta x \to 0$) $\Rightarrow f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x).\Delta x$

Esta última expresión, se utiliza para calcular el valor numérico aproximado de una función (en base al concepto de diferencial)

Ejemplo: Verificaremos que $dy \cong \Delta y$ (para Δ x pequeños)

Dada la función y = f (x) = x^2; calcular el incremento Δ y y la diferencial dy para $x_0 = 20$ y Δ x = 0,1

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - \cancel{x_0^2} = x_0^2 + 2x_0 . \cancel{\Delta x} + (\Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0 .□ \Delta x + (\Delta x)^2$

$\Delta y = 2 \cdot 20 \cdot 0{,}1 + (0{,}1)^2 = 4{,}01$
dy = f ´(x) · dx = 2x · Δ x =
dy = 2 · 20 · 0,1 = 4,00

El error en este caso es: δ =□ Δ **y - dy =** 4,01 – 4,00 = 0,01□

REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DIFERENCIAL

Si analizamos la figura 1 y figura2

En el triángulo rectángulo PMT: $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{MT}{MP} = \dfrac{MT}{\Delta x}$

$MT = \Delta x \cdot \operatorname{tg} \alpha$

pero $\operatorname{tg} \alpha = f\,'(x_0) \longrightarrow MT = f\,'(x_0) \cdot \Delta x$

Y como el segundo miembro es la diferencial dy tenemos: **dy = MT**
Se interpreta entonces, que ***la diferencial de una función es el incremento de la recta tangente cuando se pasa de un valor x_0 a un valor $x_0 + \Delta x$***

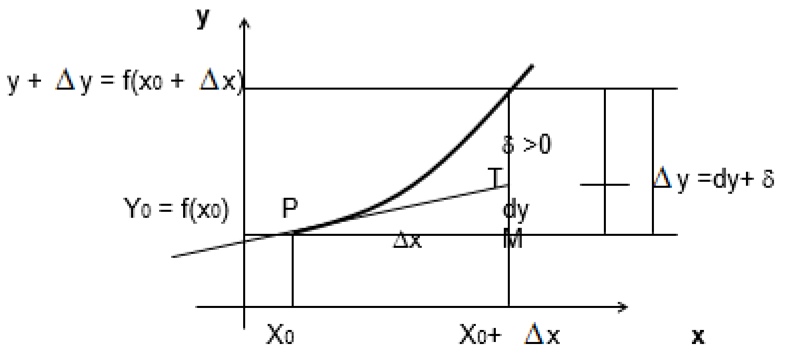


Figura 1

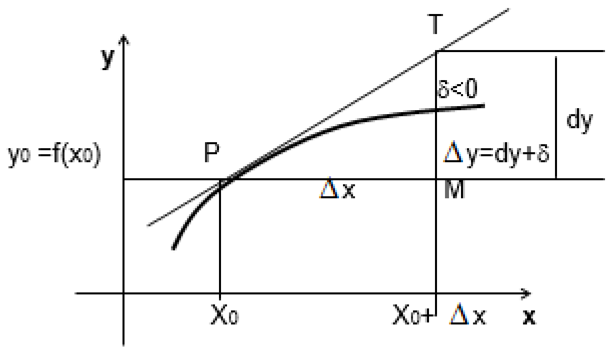


Figura 2

OBSERVACIÓN: dependiendo de la función, el error δ puede ser positivo o negativo (ver fig. 1 y fig.2)

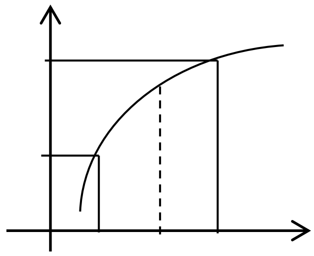
APLICACIONES DE LA DERIVADA

CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO DE UNA FUNCION

En la Unidad Nº 1 se analizaron conceptos como crecimiento, decrecimiento y monotonía de una función, sin embargo, estas y otras particularidades no se puede determinar calculando el valor de la función en puntos aislados. **La finalidad de este tema es establecer un método general para analizar funciones.**

y $y = f(x)$

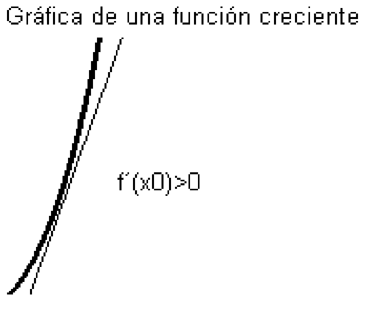
$f(x_0 + \Delta x)$

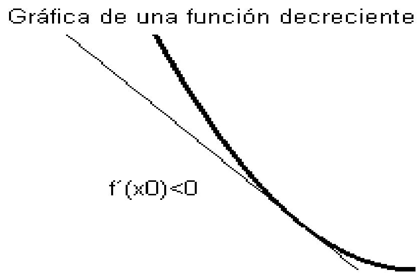


Recordemos que:
Una función **crece** en el punto **P0** (x_0 , y_0) cuando:
$f(x_0 - h) < f(x_0) < f(x_0 + h)$
Si a *h* le llamamos Δx se verifica que:
$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) < 0$ cuando $\Delta x < 0$
$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) > 0$ cuando $\Delta x > 0$
Por lo tanto la razón incremental ($\Delta y / \Delta x$) será**:**

$\Delta y / \Delta x \geq 0 (- / -)$ cuando $\Delta x < 0$
$\Delta y / \Delta x \geq 0 (+ / +)$ cuando $\Delta x > 0$

Es decir, una función es creciente en **x0** cuando para todo incremento **Δx** , la razón incremental **Δy/Δx** resulta de igual signo y positiva; recordando la definición de derivada: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, se ve que al realizar el cociente de ambos incrementos de igual signo, su resultado deberá ser siempre positivo.
Por lo tanto **una función es creciente en P0** (x_0 , y_0) $\Leftrightarrow f'_{(x0)} > 0$
De igual manera:
Una función es decreciente en **x0** cuando para todo incremento **Δx** , la razón incremental **Δy/Δx** resulta de igual signo y negativa; recordando la definición de derivada: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, se ve que al realizar el cociente de ambos incrementos de distinto signo, su resultado deberá ser siempre negativo.
Por lo tanto **una función es decreciente en P0** $\Leftrightarrow f'_{(x0)} < 0$
Resumiendo lo expuesto anteriormente se tendrá que si la función es creciente en un punto, su derivada en ese punto es positiva f´(x_0)>0, y si la función es decreciente en un punto su derivada en ese punto es negativa f¨(x_0)<0.





<u>CRITERIOS PARA DETERMINAR INTERVALOS DE CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO</u>

Este concepto de crecimiento y decrecimiento expuesto en el párrafo anterior para un punto, también puede generalizarse para un intervalo usando el concepto de derivada.
Sea f(x) continua en $[a,b]$, y derivable en el intervalo (a,b) ocurre que:

$$\begin{cases} f'_{(x)} > 0 \Leftrightarrow f_{(x)} \textit{ crece en el intervalo } (a,b) \\ f'_{(x)} < 0 \Leftrightarrow f_{(x)} \textit{ decrece en el intervalo } (a,b) \end{cases}$$

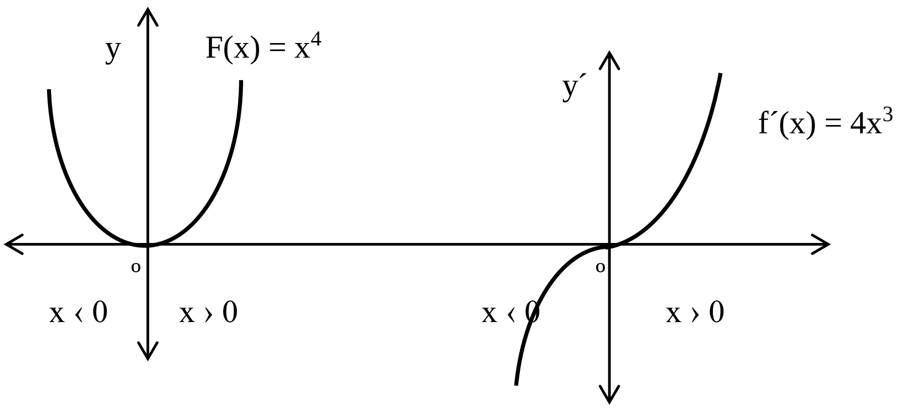
Ejemplo:

Dada la función f(x)= x^4, determinar su dominio de crecimiento y decrecimiento.

- Derivo la función f(x)= x^4 , quedando f´(x) = $4x^3$
- La función está definida en todo punto de conjunto real
  - Para x ‹ 0 se cumple f´(x) ‹ 0 en el intervalo $(-\infty, 0)$; por lo tanto la f(x) = x^4 decrece en dicho intervalo
  - Para x › 0 se cumple f´(x) › 0 en el intervalo $(0, +\infty)$; por lo tanto la f(x) = x^4 crece en dicho intervalo

  - Para x = 0 se cumple f´(x) = 0, la tangente a la curva se mantiene paralela al eje de las x; entonces en x = 0 la f(x) no crece ni decrece.

Verificación: Si x = -1; f´(x) = 4.(-1) = -4 ‹ 0
Si x = 1 ; f´(x) = 4.1 = 4 › 0
Si x = 0 ; f´(x) = 0 (punto crítico)



MAXIMOS, MINIMOS Y PUNTOS DE INFLEXIÓN

a) MÁXIMO Y MINIMO ABSOLUTO

Los conceptos de **Máximos y Mínimos absolutos**, se refieren a **condiciones del dominio** o campo de existencia de la función.

El **Máximo y Mínimo absoluto** de una función, es el valor más grande y el más chico respectivamente en todo el campo de existencia de la función y no son superados por ningún otro valor. Es decir:

- La función $f_{(x)}$ tiene en x_0 un **máximo absoluto(Ma)** si el valor de $f_{(x_0)} = Ma$, es mayor que el valor de $f_{(x)}$ para todo x del dominio de la función.
- La función $f_{(x)}$ tiene en x_0 un **mínimo absoluto(ma)** si el valor de $f_{(x_1)} = ma$, es menor que el valor de $f_{(x)}$ para todo x del dominio de la función.

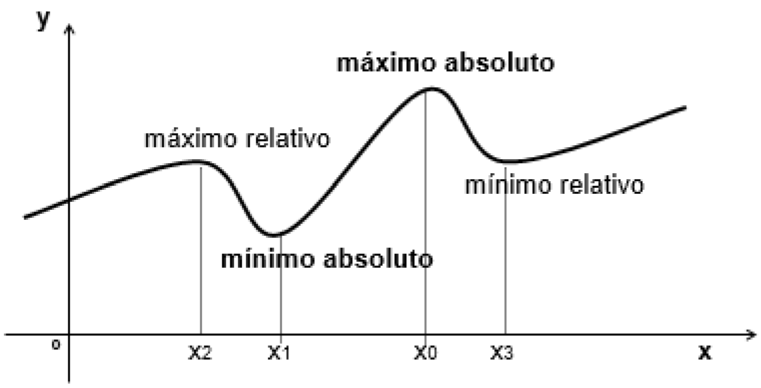
b) MÁXIMO Y MINIMO RELATIVO

Los conceptos de **Máximos y Mínimos relativos**, se refieren a **condiciones locales** de la función extendidas sobre un entorno suficientemente pequeño del punto considerado

Definiremos máximo y mínimo relativo

- La función $f_{(x)}$ tiene en x_0 un **máximo relativo(Mr)** si el valor de $f_{(x_2)} = Mr$, es mayor que el valor de $f_{(x)}$ para todo x de un entorno reducido de x_0
- La función $f_{(x)}$ tiene en x_0 un **mínimo relativo(mr)** si el valor de $f_{(x_3)} = mr$, es menor que el valor de $f_{(x)}$ para todo x de un entorno reducido de x_0.

Los máximos y mínimos de una función se llaman también **extremos.** En el caso de funciones derivables se podrá relacionar los extremos relativos con la derivada en el punto, ***si la función alcanza en x_0 un máximo o un mínimo entonces su derivada en x_0 debe anularse, lo que implica que la recta tangente a la curva en el punto de extremo relativo es horizontal***



$$f_{(x_0)} = Ma$$
$$f_{(x_1)} = ma$$
$$f_{(x_2)} = Mr$$
$$f_{(x_3)} = mr$$

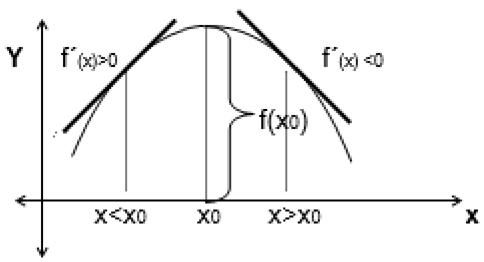
<u>CONDICIONES PARA LA EXISTENCIA DE EXTREMOS</u>

Condición necesaria: $f'_{(x_0)} = 0$ ó $f'_{(x_0)}$ no existe. En este caso el punto $P_{0(x_0,y_0)}$, se denomina ***Punto Crítico***

Condición suficiente: se pueden tener distintos criterios, pero enunciaremos solo dos

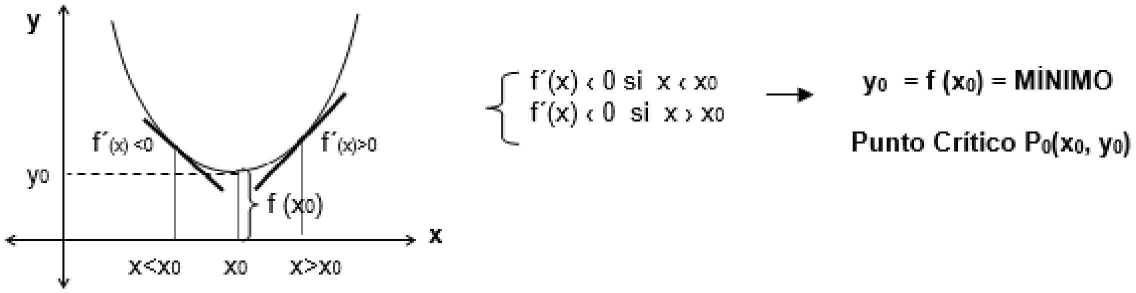
a) **Criterio de la derivada primera:**

- Si la $f'_{(x)}$ es positiva a la izquierda del punto critico $P_0(x_0,y_0)$ y negativa a la derecha , es decir la recta tangente pasa de valores positivos a valores negativos, entonces en el punto critico de ordenada x_0 se encuentra un **MÁXIMO.**



$$\left\{ \begin{array}{l} f'(x) > 0 \text{ si } x < x_0 \\ f'(x) < 0 \text{ si } x > x_0 \end{array} \right. \longrightarrow \begin{array}{l} y_0 = f(x_0) = \textbf{MÁXIMO} \\ \textbf{Punto Critico } P_0(x_0,y_0) \end{array}$$

- Si la $f'_{(x)}$ es negativa a la izquierda del punto critico $P(x_0,y_0)$ y positiva a la derecha , entonces en el punto critico de ordenada x_0 se encuentra un **MINIMO**



Ejemplo

Dada la función y = f(x) =x^2+ 4x+ 6, analizar máximo y mínimo por el criterio de la derivada primera

- Derivando la función queda:
  y´ = f´(x) = 2x + 4
- Por la condición necesaria para la existencia de extremos, se sabe que:
  $f'_{(x_0)} = 0 \longrightarrow$ f´(x) = 2x + 4 = 0 $\longrightarrow$ x_0 = -2 (abscisa)

Es decir que para este valor x_0 = -2, la f´(x_0) = 0. Se remplaza f´(x_0) = 2.(-2) + 4 = 0.Se debe verificar que en x_0 = -2 , se encuentra un punto crítico.

- Se analizara el signo de la derivada primera alrededor de este punto(x_0 = -2).

  - Si x ‹ -2; por ejemplo x = -3 $\longrightarrow$ f´(x) = 2. (-3) + 4 = -2 f´(x) ‹ 0 tiene signo negativo

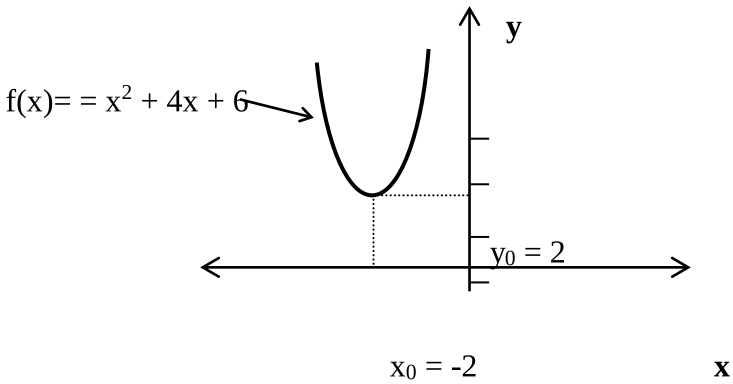
  - Si x › -2; por ejemplo x = 1 $\longrightarrow$ f´(x) = 2. (-1) + 4 = 2 f´(x) › 0 tiene signo positivo

Conclusión:

Como f´(x) pasa de valores negativos a positivos en x_0 = -2 , entonces existe un MÍNIMO

- Se reemplaza éste valor crítico (x_0 = -2), en y = f(x) = x^2 +4 x + 6, quedando
  y = f(-2) = $(-2)^2$ + 4 . (-2) + 6 = 2

Por lo tanto el punto critico en el plano es **P_0 (-2,2)** , y en él existe un **mínimo** de valor **y = 2**



b) Criterio de la derivada segunda:

La condición necesaria y suficiente:

Si $f''_{(x_0)} < 0 \longrightarrow$ existe un máximo en x_0

Si $f''_{(x_0)} > 0 \longrightarrow$ existe un mínimo en x_0

Este criterio no puede aplicarse cuando $f''_{(x_0)} = 0$; en ese caso se vuelve al análisis por medio del concepto de la derivada primera

Ejemplo:
Encontrar los máximos y mínimos de la siguiente función , usando el criterio de la derivada segunda:
$y = x^3 / 3 - 9x + 6$

a- Derivo $y' = f'(x) = x^2 - 9$
b- Condición necesaria para que exista extremo: $y' = f'_{(x_0)} = 0$

$y' = f'(x) = x^2 - 9 = 0 \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -3 \end{cases} \longrightarrow$ Serán las abscisas de los puntos críticos $P_1(3;-12)$ y $P_2(-3;24)$

c- Derivo nuevamente(segunda derivada)
$y'' = f''(x) = 2x$

d- A esta nueva función le aplico por separado el valor numérico de los puntos críticos(abscisas)

- $f''(3) = 2 \cdot 3 = 6 > 0 \longrightarrow$ existe un mínimo en $x_1 = 3$ donde $m = f(3) = 27/3 - 27 + 6 = -12$

- $f''(-3) = 2 \cdot (-3) = -6 < 0 \longrightarrow$ existe un máximo en $x_2 = -3$ donde $M = f(-3) = -27/3 + 27 + 6 = 24$

e- Grafíquelo usted.....

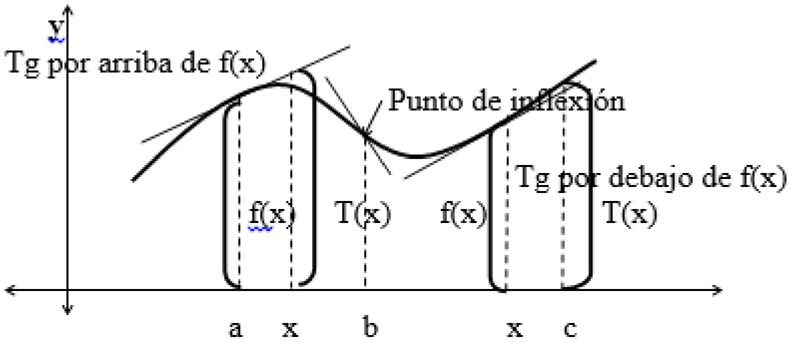
CONCAVIDA Y CONVEXIDAD

Partiendo de una idea intuitiva se puede decir que es cóncava la figura que retiene el agua, mientras que una forma es convexa cuando nos derrama el agua.

Función Convexa: Diremos que la curva gira su convexidad hacia el semieje positivo de las “y” en el (a,b), si en dicho intervalo se verifica para todo x, que la TANGENTE se mantiene por arriba de la curva.
En símbolos: $f(x) - T(x) < 0$; donde $T(x)$ es el valor de la ordenada sobre la recta tangente, en este caso la curva es CONVEXA en el intervalo (a,b)

Función Cóncava: Diremos que la curva gira su convexidad hacia el eje negativo de las “y” en el (b,c), si en dicho intervalo se verifica para todo x, que la TANGENTE se mantiene por debajo de la curva.

En símbolos: f(x) –T(x) › 0 ; en este caso la curva es CÓNCAVA en el intervalo (b,c).



Teorema:

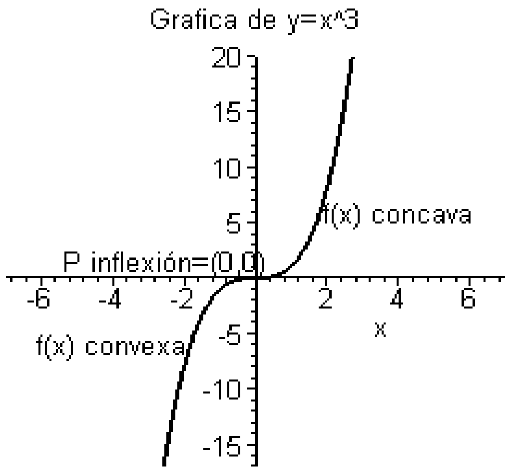
Sea f una función cuya segunda derivada existe en un intervalo abierto(a,b):

- Si f ''(x_0) › 0 para todo x en (a,b) $\longrightarrow$ la f(x) es CÓNCAVA en (a,b)
- Si f ''(x_0) ‹ 0 para todo x en (a,b) $\longrightarrow$ la f(x) es CONVEXA en (a,b)

Punto de inflexión: Sea $f_{(x)}$ una función cuya gráfica tiene recta tg en (xi ; $f_{(xi)}$). Se dice que el punto Pi (xi ; $f_{(xi)}$) es un punto de inflexión si la curva cambia de cóncava a convexa (o viceversa) en ese punto.

Teorema: Sea $f_{(x)}$ la función cuya gráfica está dada por la ecuación y = f(x). Si "xi" es un punto perteneciente al dominio de $f_{(x)}$ tal que $f''_{(xi)}=0$; ó $f''_{(xi)}$ no existe; y además $f''_{(x)}$ cambia de signo al pasar de la izquierda de "xi" a la derecha, entonces diremos que en el punto de la curva con abscisa igual "xi", es un punto de inflexión.

Ejemplo: Determinar los intervalos de convexidad y concavidad de la curva cuya ecuación es
y = f(x) = x^3
$f'_{(x)} = 3x^2$ $f''_{(x)} = 6x$. Analizando el signo se tiene: $f''_{(x)} > 0$ para toda x › 0 , y $f''_{(x)}$ ‹ 0 para los valores negativos de x, es decir que en $(-\infty;0)$ la curva es convexa; en $(0;+\infty)$ la curva es cóncava, pues la derivada segunda es positiva. También podemos afirmar que en xi = 0 existe un punto de inflexión, porque en él la derivada segunda es cero y a la izquierda y derecha los signos de la derivada segunda son distintos.



Intervalo de concavidad $(0,+\infty)$

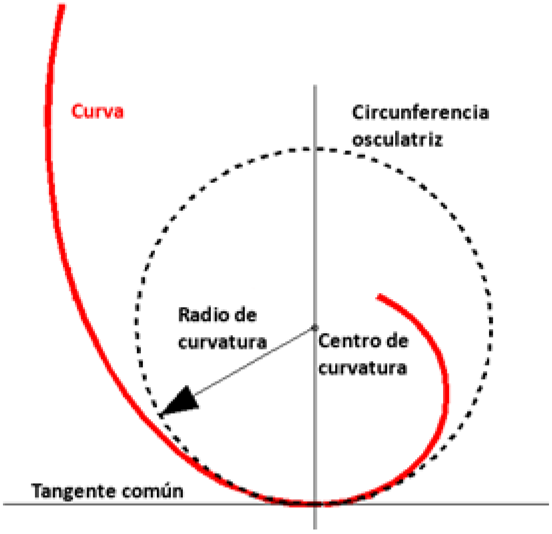
Intervalo de convexidad $(-\infty;0)$

Punto de Inflexión Pi (xi ; $f_{(xi)}$) $\Rightarrow$ Pi(0,0)

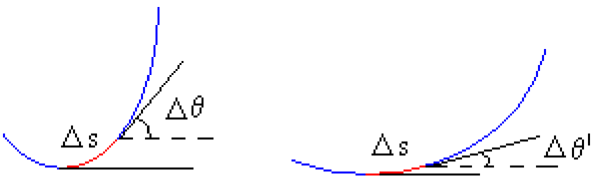
CURVATURA Y RADIO DE CURVATURA

Introducción: El radio de curvatura

Con la aparición del cálculo diferencial en el siglo XVII el proceso de calcular tangentes resultaba sumamente sencillo. ¿Y si buscamos que la tangente sea una circunferencia? Es decir, la circunferencia tangente en el punto dado de una curva. Isaac Newton la describió en su *Principia*, dando una construcción geométrica para conseguirla. Esta circunferencia se denomina circunferencia osculatriz, que fue llamada "*circulum osculans*" ("círculo que besa") por Leibniz. Se trata de una circunferencia cuyo centro se encuentra sobre la recta normal a la curva, llamado centro de curvatura, y un radio que denominamos radio de curvatura de la curva en ese punto.

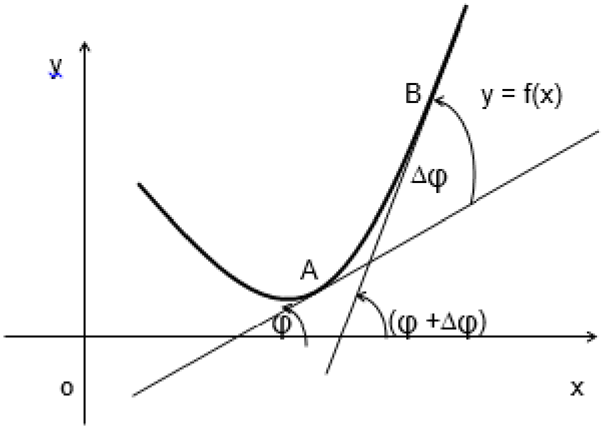


En el lenguaje ordinario, decimos que un trozo de carretera Δs tiene más curvatura que otro cuando el cambio de dirección $\Delta\theta$ es mayor a **igualdad** de camino recorrido en ambos. Compárese la figura de la izquierda con la de la derecha



Llamaremos curvatura media C de un arco de curva AB al cociente del ángulo $\Delta\theta$ girado por la tangente desde A hasta B dividido en la longitud de arco AB

$C = \frac{\Delta\theta}{\Delta s}$



Y curvatura en el punto A de la curva al límite de la curvatura media del arco AB cuando B tiende hacia A o sea $\Delta s \to 0$ es decir $C = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds}$.

Trabajando este concepto se obtiene $C = \frac{y''}{\left(1 + y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ que expresa la curvatura en un a partir de la ecuación de la curva.

El radio ρ de curvatura medio e instantáneo se definen, como $\rho = \frac{\Delta s}{\Delta\theta}$ (radio medio) y

$\rho = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta\theta} = \frac{ds}{d\theta} = \frac{1}{C}$ (radio instantáneo)

Por lo tanto $\rho = \frac{\left(1 + y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{y''}$

Ejercicio.

1. Calcular la curvatura y el radio de curvatura de la parábola $x^2 = 2py$ en el vértice.

Despejo se obtiene $y = \frac{x^2}{2p}$ luego derivando dos veces se obtienen las siguientes derivadas:

$y' = \frac{x}{p}$ $\quad y'' = \frac{1}{p}$ reemplazando en las formulas respectivas de curvatura y radio de curvatura recordando que se calculan en P(0,0) se obtiene que $C = \frac{1}{p}$ y $\rho = p$

2. Buscar la curvatura y radio de curvatura en el punto (1, 1/2p)
3. Calcular la curvatura y radio en algún vértice de la elipse de semiejes a y b respectivamente

ESQUEMA PARA LA REPRESENTACIÓN DE LA FUNCIÓN Y = F (X).

1. Determinar el dominio de la función f (x).
2. Determinar si la función tiene simetría par o impar, o si es periódica.
3. Determinar los puntos de discontinuidad de la función (evitables y no evitables)
4. Encontrar los puntos de corte con los ejes, o sea, los ceros de la función f (x) = 0, y el punto f (0).
5. Encontrar los extremos de la función y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
6. Encontrar los puntos de inflexión de la función y los intervalos de concavidad y convexidad.

Ejercicio: Estudiar la función $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN USANDO DERIVADAS

Para resolver los problemas de máximo o mínimo se deberán cumplir los siguientes pasos:

1. Se plantea la función que hay que maximizar o minimizar.
2. Se plantea una ecuación que relacione las distintas variables del problema, en el caso de que haya más de una variable.
3. Se despeja una variable de la ecuación y se sustituye en la función de modo que nos quede una sola variable.
4. Se deriva la función y se iguala a cero, para hallar los extremos locales.
5. Se realiza la 2ª derivada para comprobar el resultado obtenido.

<u>EJERCITACION</u>

LIMITE

1) Calcular los siguientes límites:

a. $\lim\limits_{x\to 1} (x^2 -2x + 3)$ (Reemplazo el valor de x por 1) $\lim\limits_{x\to 1} (1^2 -21 + 3) = 2$

b. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x^2}{x^2+x-2} =$

c. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3-4x^2-5x}{x^2+5x} =$ Esta es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Para encontrar el valor del limite se saca factor común en el numerador y en el denominador y se simplifica

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x(x^2-4x-5)}{x(x+5)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x^2-4x-5)}{(x+5)}$ Reemplazando el valor de x=0 se obtiene L = 1

d) $\lim\limits_{x\to 17} \dfrac{4-\sqrt{x-1}}{x-17}$ Se multiplica y divide la función por el conjugado del numerador

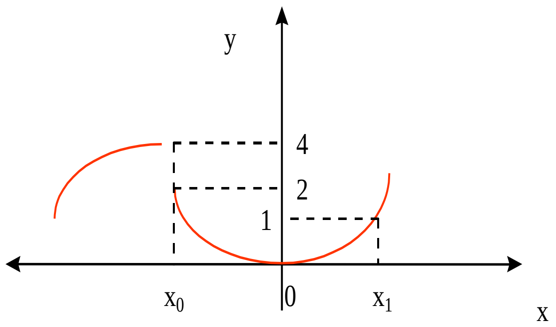
$\lim\limits_{x\to 17} \dfrac{4-\sqrt{x-1}.}{x-17} \, \dfrac{4+\sqrt{x-1}.}{4+\sqrt{x-1}} = \lim\limits_{x\to 17} \dfrac{(4)^2-(\sqrt{x-1})^2}{(x-17).(4+\sqrt{x-1})}$ simplificando $\lim\limits_{x\to 17} . \dfrac{16-x+1}{(x-17).(4+\sqrt{x-1})}$

Agrupando y ordenando el denominador se simplifica la expresión obteniéndose: $\lim\limits_{x\to 17} .$

$-\dfrac{1}{(4+\sqrt{x-1})} = -\dfrac{1}{8} =$

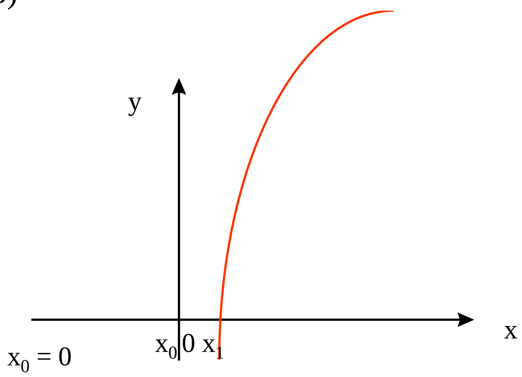
e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} =$ (aplico diferencia de cuadrados y me queda) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}$ (simplifico) y nos queda: $\lim\limits_{x\to 1} (x+1) = 2$

2. Dada las siguientes funciones y = f(x), calcular los límites laterales en x_0 y x_1 para concluir si existen o no.

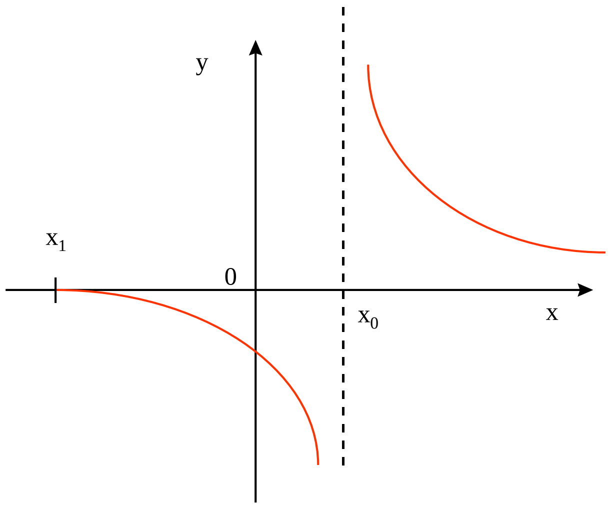


$L_1 = \lim_{x\to x0+} f(x) = 2$	**el límite**
$L_2 = \lim_{x\to x0-} f(x) = 4$	**no existe**($L_1 \neq L_2$)
$L_1 = \lim_{x\to x1-} f(x) = 1$	**el límite**
$L_2 = \lim_{x\to x1+} f(x) = 1$	**existe y vale 1**

b)



c)



3- Analizar las funciones del ejercicio anterior y justificar si son continuas o no en x_0 y x_1.
4- Encontrar los puntos de discontinuidad y clasificarlos. En los casos que la función sea discontinua evitable redefinir la función.

a. $f(x) = \dfrac{1}{x + 2}$

b. $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 6x + 9}$

c. $f(x) = \begin{cases} (2x-1) --- cuando (x<1) \\ (1+x) ---- cuando (x \geq 2) \end{cases}$

d. $f(x) = \begin{cases} senx ----- cuando (x \leq 0) \\ (x+2) ---- cuando (x>1) \end{cases}$

DERIVADA

1) Hallar la derivada de las siguientes funciones y en las 5 primeras encontrar el valor de la derivada en x=2:

a) $y = 2$
b) $y = 3x$
c) $y = x^2 + 5$
d) $y = 7x^3 - \sqrt{x}$
e) $y = \frac{3}{x} + \cos x$
f) $y = \frac{1}{x^4} + 6x^5 - \frac{1}{\sqrt{x}}$
g) $y = (2x^4)^3$
h) $y = 2\ln x - \frac{3\operatorname{sen} x}{\pi}$
i) $y = 3x.e^x$
j) $y = 2^x.\sqrt[3]{x}$
k) $y = \frac{4\ln x}{x^5}$
l) $y = \operatorname{tg} x$
m) $y = \ln^7 x$
n) $y = \ln(x^7)$

2) Encontrar las derivadas sucesivas, segunda y tercera de las siguientes funciones.

a) $y = x^3 .\, e^x$
b) $y = 2x^4 - 32x^{-2}$
c) $y = sen3x$
d) $y = \ln 4x$

3) Derivar las siguientes funciones y calcular el valor de la derivada en el punto indicado en cada caso.

a) $f(x) = 5 + x^3$ en $x_0 = 2$
b) $f(x) = 4\sqrt{x^3} - e^x$ en $x_0 = 1$
c) $f(x) = 3\operatorname{sen}^5 x$ en $x_0 = \frac{\pi}{3}$

4) Encontrar el diferencial de las siguientes funciones.

a) $f(x) = x \cdot \sqrt{1-x^2}$

b) $f(x) = x^2 + \dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}$

5) Sea $y = x^2$; encontrar dy y Δy en $x_0 = 1$. Comparar los resultados.

a) $\Delta x = 0.01$

b) $\Delta x = 0.1$

c) $\Delta x = 0.5$

6) Realizar el gráfico de la función $y = x^2$ y de su recta tangente y secante con $\Delta x = 0{,}5$ en el punto P_0 (1,1). Marque dy, Δy y δ (error) en el gráfico

<u>RECTA TANGENTE Y RECTA NORMAL</u>

7) Determinar las ecuaciones de la recta tangente y la recta normal a la curva $y = x^3 + 1$ en el punto P(1,2). Graficar la curva y lar rectas tangente y normal

8) Ídem a la anterior para la curva $y = \dfrac{x^2}{2} - 1$ en el punto P(2,1)

9) Ídem a la primera para la curva $y = e^x$ en el punto P(0,1)

<u>EXTREMOS RELATIVOS.</u>
<u>INTERVALOS DE CRECIMIENTO Y DE DECRECIMIENTO.</u>
<u>INTERVALOS CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD.</u>

1) Dadas las siguientes funciones

I. Determinar los valores críticos
II. Determinar los extremos relativos (máximos y mínimos relativos), si existen, usando el criterio de la derivada primera.
III. Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función
IV. Realizar un grafico aproximado de la función

a) $f(x) = 3x^2 + 1$

b) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 4$

c) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$

d) $f(x) = -\dfrac{1}{5}x^5 + 3x^3$

2) Dadas las siguientes funciones

I. Determinar los valores críticos
II. Determinar los extremos relativos (máximos y mínimos relativos), si existen, usando el criterio de la derivada segunda.
III. Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función
IV. Realizar un grafico aproximado de la función

a) $f(x) = -2x^2 + 5x - 2$

b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$

c) $f(x) = 3x^4 + 4x^3$

d) $f(x) = 3x^2 + 12x$

e) $f(x) = e^x$

PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

1) Se pretende fabricar una lata de conserva cilíndrica (con tapa) de 1 litro de capacidad. ¿Cuáles deben ser sus dimensiones para que se utilice el mínimo posible de metal?

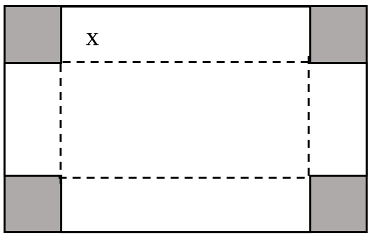
2) Recortando convenientemente en cada esquina de una lámina de cartón de dimensiones 80 cm x 50 cm un cuadrado de lado x y doblando convenientemente (véase figura), se construye una caja. Calcular x para que volumen de dicha caja sea máximo.

3) Hallar las dimensiones que hacen mínimo el coste de un contenedor que tiene forma de paralelepípedo rectangular sabiendo que su volumen ha de ser 9 m3, su altura 1 m y el coste de su construcción por m2 es de 50 € para la base; 60 para la etapa y 40 para cada pared lateral.

4) Una hoja de papel debe tener 18 cm2 de texto impreso, márgenes superior e inferior de 2 cm de altura y márgenes laterales de 1 cm de anchura. Obtener razonadamente las dimensiones que minimizan la superficie del papel.

5) Un triángulo isósceles de perímetro 30 cm, gira alrededor de su altura engendrando un cono. ¿Qué valor debe darse a la base para que el volumen del cono sea máximo?

RESOLUCIÓN DEL EJERCICIO Nº 2



$V = (80-2x)(50-2x)x$

Desarrollando la ecuación anterior se obtiene

$V = 4x^3 - 260x^2 + 4000x$

$V' = 12x^2 - 520x + 4000$

Aplicando la condición necesaria que es ´la derivada primera igual a 0 se obtiene dos valores de x del que se debe descartar 1 de ellos ya que es incompatible con el problema planteado. x=10 y x=33,3 (No es válida ya que (50-2x<0).

Calculando la segunda derivada del volumen se obtiene

$V'' = 24x - 520 \qquad V''(10) = 24.10 - 520 < 0$

Luego para x=10 hay un máximo. Y el volumen será V=60.30.10=18000 cm^3