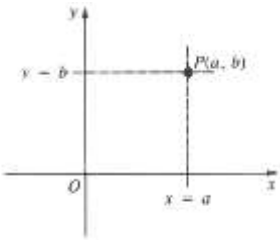
UNIDAD 3:

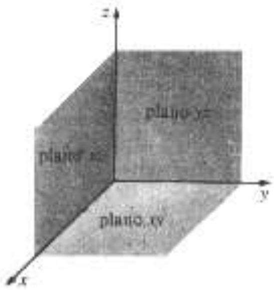
GEOMETRIA EN EL ESPACIO: RECTAS, PLANOS Y CUÁDRICAS

NOCIONES DE GEOMETRÍA EN EL ESPACIO

Una manera de describir la posición de un punto ***P*** en el plano, consiste en asignarle coordenadas relativas a dos ejes mutuamente ortogonales (o perpendiculares), llamados ejes ***x*** e ***y***.
Si ***P*** es el punto de intersección de la recta ***x = a*** (perpendicular al eje x) y la recta ***y = b*** (perpendicular al eje y), entonces se dice que los elementos de la pareja ordenada ***(a; b)*** son las coordenadas cartesianas rectangulares del punto.



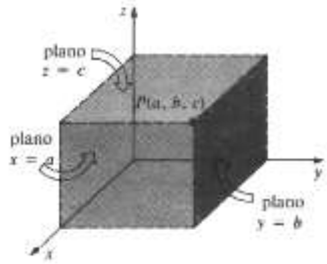
En el espacio de tres dimensiones se construye un sistema de coordenadas rectangulares utilizando ***tres ejes*** mutuamente ortogonales. El punto en el que estos ejes se cortan se llama origen (***O***).



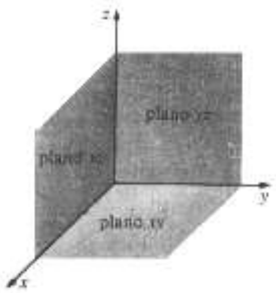
Ahora bien, si:

x = a **y = b** **z = c**

Son tres planos perpendiculares al eje ***x***; eje ***y*** y eje ***z*** respectivamente; el punto ***P*** en el cual se cortan dichos planos se puede representar por una **tríada ordenada** de números (a; b; c) llamados ***coordenadas cartesianas rectangulares*** del punto. Los puntos **a**; **b** y **c** se denominan coordenadas **x**; **y**; **z** de ***P(a; b; c)*** respectivamente.



Cada pareja (o par) de ejes coordenados determina un ***plano coordenado***. Los ejes ***x*** e ***y*** determinan el ***plano xy***, los ejes ***x*** y ***z*** determinan el ***plano xz*** y así sucesivamente. Los planos coordenados dividen el espacio tridimensional en ocho partes conocidas como ***octantes***. El octante en el cual las tres coordenadas de un punto son *positivas* se llama *primer octante*. No existe ningún acuerdo para denominar a los otros siete octantes.
La siguiente tabla resume las coordenadas de un punto que se encuentre en un eje coordenado o en un plano coordenado. Es también posible describir, por ejemplo, el ***plano xy*** mediante la simple ecuación **z = 0**, como se ve en la tabla. De manera semejante, el ***plano xz*** es **y = 0**, y el ***plano yz*** es **x = 0**.



Ejes	Coordenadas	Plano	Coordenadas
x	(a; 0; 0)	**xy**	(a; b; 0)
y	(0; b; 0)	**xz**	(a; 0; c)
z	(0; 0; c)	**yz**	(0; b; c)

- **<u>Ecuación del Plano</u>**:

Toda ecuación lineal en (x; y; z) representa un plano. Su ecuación general es:

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}$$

A, B y C **Coeficientes directores** del plano. <u>No</u> nulos simultáneamente

El plano queda identificado por su **recta normal "n"** que tiene coeficientes A, B y C

- La ecuación de la <u>familia de **planos que pasa por un punto**</u> **$P_0(x_0; y_0; z_0)$** es:

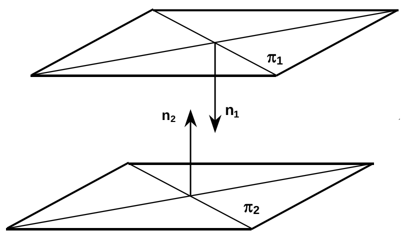
$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0}$$

- **<u>Dos planos Paralelos</u>:**

Sí: $\boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}}$

- π_1: $A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$ - $n_1 (A_1; B_1; C_1)$

- π_2: $A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$ - $n_2 (A_2; B_2; C_2)$

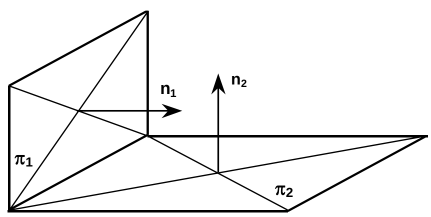


- **<u>Dos planos Perpendiculares</u>**:

Sí: $\boxed{A_1.A_2 + B_1.B_2 + C_1.C_2 = 0}$

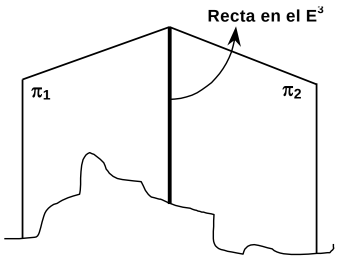
- π_1: $A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$ - $n_1 (A_1; B_1; C_1)$

- π_2: $A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$ - $n_2 (A_2; B_2; C_2)$



- **La Recta en el Espacio**:

Viene definida por la intersección de dos planos:



$$\cap \quad \begin{cases} -\ \pi_1\text{: } A_1\,x + B_1\,y + C_1\,z + D_1 = 0 \\ -\ \pi_2\text{: } A_2\,x + B_2\,y + C_2\,z + D_2 = 0 \end{cases}$$

- **Ecuación de la recta que pasa por los puntos $P_1(x_1; y_1; z_1)$** y **$P_2(x_2; y_2; z_2)$**:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

(**u**; **v** y **w** son coeficientes directores de la recta que son números cualesquiera proporcionales a los cósenos directores de la recta)

$$u = x_2 - x_1 \ ; \ v = y_2 - y_1 \ ; \ w = z_2 - z_1$$

- **Dos rectas son Paralelas:**

Sí: $\boxed{\dfrac{u_1}{u_2} = \dfrac{v_1}{v_2} = \dfrac{w_1}{w_2}}$

- **Dos rectas son Perpendiculares**:

Sí: $\boxed{u_1.u_2 + v_1.v_2 + w_1.w_2 = 0}$

a) Si la recta es Perpendicular al eje x: $\dfrac{y - y_1}{v} = \dfrac{z - z_1}{w}$. $\quad x = x_1$

b) Si la recta es Perpendicular al eje y: $\dfrac{x - x_1}{u} = \dfrac{z - z_1}{w}$. $\quad y = y_1$

c) Si la recta es Perpendicular al eje z: $\dfrac{x - x_1}{u} = \dfrac{y - y_1}{v}$. $\quad z = z_1$

d) Si la recta es Perpendicular a los dos ejes:

$x = x_1$, $y = y_1$ $\Rightarrow$ r $\perp$ a los ejes ***x*** e ***y***

$y = y_1$, $z = z_1$ $\Rightarrow$ r $\perp$ a los ejes ***y*** y ***z***

$x = x_1$, $z = z_1$ $\Rightarrow$ r $\perp$ a los ejes ***x*** y ***z***

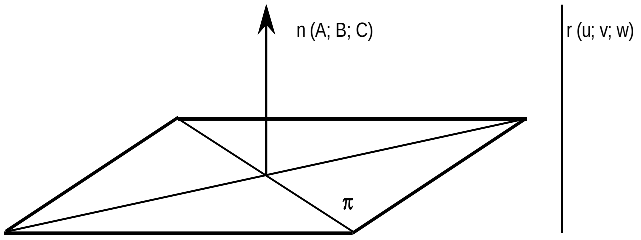
- **Recta Perpendicular a un plano**:

Sean **(u; v; w)** las componentes o coeficientes directores de una recta; para que ésta sea *perpendicular al plano* de ecuación:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Se ha de verificar que dichas componentes sean proporcionales a los coeficientes de **(x; y; z)** de la ecuación del plano que son **A**; **B** y **C**.
Es decir:

$$\boxed{\frac{u}{A} = \frac{v}{B} = \frac{w}{C}\ .}$$

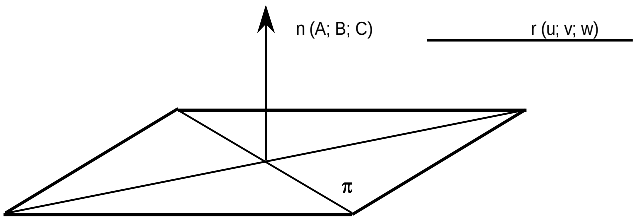


- **Recta Paralela a un plano**:

La condición es:

$$\boxed{u \,.\, A + v \,.\, B + w \,.\, C = 0}$$

Puesto que la *recta paralela* (//) al plano π es perpendicular a la normal del plano.



- Planos Proyectantes:

Cada una de las siguientes ecuaciones:

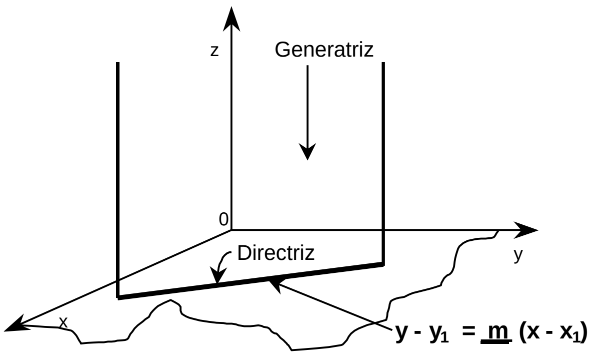
$\frac{x - x_1}{u} = \frac{y - y_1}{v}$;	$\frac{x - x_1}{u} = \frac{z - z_1}{w}$;	$\frac{y - y_1}{v} = \frac{z - z_1}{w}$.

Son las de un plano que contiene a la recta. Como cada uno de estos planos es perpendicular a uno de sus planos coordenados, reciben el nombre de ***Planos Proyectantes de la recta***; y sus trazas con aquellos son las proyecciones de la recta sobre dichos planos coordenados.

Ejemplo:

$$\frac{x - x_1}{u} = \frac{y - y_1}{v} \Rightarrow \boxed{y - y_1 = \frac{v}{u}(x - x_1)}$$ ⇒Ecuación de la recta por el Punto P_1 (x_1; y_1)

- <u>Generatriz</u>: Paralela al eje *z* (variable faltante en la ecuación del plano)
- <u>Directriz</u>: Traza del plano proyectante $\frac{x - x_1}{u} = \frac{y - y_1}{v}$ sobre el plano coordenado *xy*;



SUPERFICIES CUÁDRICAS

- **<u>Generación de las mismas</u>**

Está definida por una ecuación de segundo grado en 3 (tres) variables. Una sección plana (corte) de una cuádrica es una cónica o una forma degenerada o límite de ésta.

- **Ecuación general**

$$\mathbf{Ax^2 + By^2 + Cz^2 + \underbrace{Dxy + Exz + Fyz}_{\text{Rotación}} + \underbrace{Gx + Hy + Iz}_{\text{Translación}} + K = 0}$$

Por Rotación o Translación de ejes, o bien por ambas transformaciones (cálculo bastante complejo que trata el “Álgebra Lineal” y que en la actualidad está en programas de computación) se analizan las diversas superficies Cuádricas surgidas de la combinación de 3; 2 o 1 término cuadrático.

La ecuación general puede tomar una de las siguientes formas:

I - $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = D$	**Cuádricas con centro**
II - $Ax^2 + By^2 = Iz$	**Cuádricas sin centro**

Si ninguna de las constantes de las ecuaciones **I** ó **II** es nula, las ecuaciones se pueden escribir de estas dos maneras:

De la **I**

$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \rightarrow$$

Dependiendo de los signos que tome la ecuación, puede representar 3 superficies esencialmente distintas y simétricas con respecto al origen.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

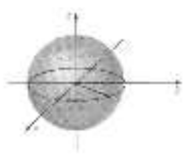
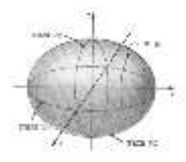
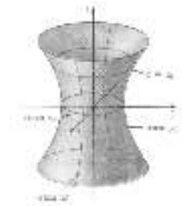
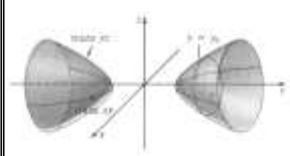
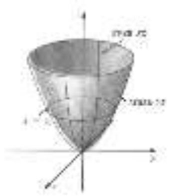
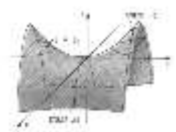
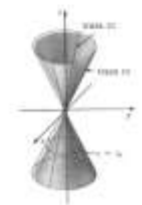
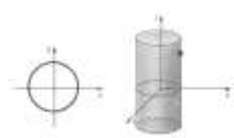
De la **II**

$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c} . \quad \rightarrow$$

Las dos superficies esencialmente distintas que puede representar, son:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c} .$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c} .$$

SUPERFICIES CUADRICAS			
 **ESFERA** $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$	 **ELIPSOIDE** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	 **HIPERBOLOIDE DE 1 HOJA** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	 **HIPERBOLOIDE DE 2 HOJAS** $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
 **PARABOLOIDE** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz$	 **PARABOLOIDE HIPERBOLICO** $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz$	 **CONO RECTO** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$	 **CILINDRO** $x^2 + y^2 = c$

- **Traza de una superficie:** Una *traza de una superficie* es una línea (curva o recta) formada por la **intersección** de una superficie y un plano coordenado, y proporciona a la gráfica características particulares.

- **Análisis de las Superficies cuádricas**

Las Cuádricas se clasifican según sus formas, ecuaciones y propiedades:

ELIPSOIDE

La forma canónica de la ecuación del elipsoide con centro en el origen es:

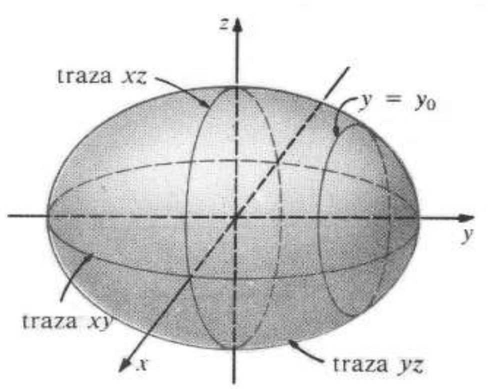
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Un ejemplo real

Trazas sobre los planos coordenados

Cortadas por el plano coordenado	Obtenemos la traza de:
xy (z = 0)	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow$ **Elipse**
xz (y = 0)	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \Rightarrow$ **Elipse**
yz (x = 0)	$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \Rightarrow$ **Elipse**

La figura resume las trazas en los planos coordenados y proporciona una gráfica característica.



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

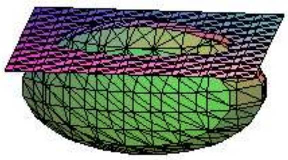
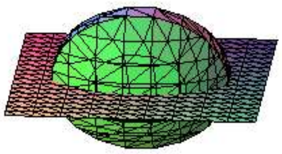
Secciones con planos paralelos a los coordenados

Los cortes del elipsoide por planos paralelos a los coordenados son curvas cónicas de tipo elipse (en lo siguiente se supone que el elipsoide esta centrado en el origen de coordenadas y tiene la ecuación que se da arriba):

A- Sobre el plano xy: z=k

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{k^2}{c^2} \\ z=k \end{cases}$$

si $1-\dfrac{k^2}{c^2}>0 \Rightarrow \dfrac{k^2}{c^2}<1 \Rightarrow |k|<c$ Elipses reales en planos paralelos al xy

Para 0<k<c	Para k=0
	

si $1-\dfrac{k^2}{c^2}=0 \Rightarrow \dfrac{k^2}{c^2}=1 \Rightarrow |k|=c$ Elipses Puntuales

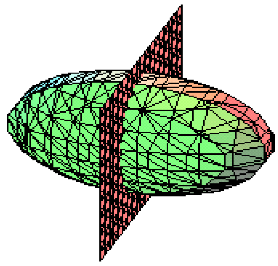
si $1-\dfrac{k^2}{c^2}<0 \Rightarrow \dfrac{k^2}{c^2}>1 \Rightarrow |k|>c$ Elipses Imaginarias

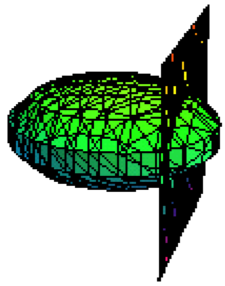
B- Sobre el plano xz: y = k

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{k^2}{b^2} \\ y=k \end{cases}$$

si $1-\dfrac{k^2}{b^2}>0 \Rightarrow \dfrac{k^2}{b^2}<1 \Rightarrow |k|<b$ Elipses en planos paralelos al xz

k=0 | Para 0<k<b



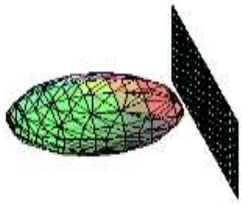


Si_ $1-\dfrac{k^2}{b^2}=0 \Rightarrow \dfrac{k^2}{b^2}=1 \Rightarrow |k|=b$ Elipses puntuales (cuando el plano es tangente al elipsoide)

k>b

Si $1-\dfrac{k^2}{b^2}<0 \Rightarrow \dfrac{k^2}{b^2}>1 \Rightarrow |k|>b$

Elipses Imaginarias (no existe intersección real).→



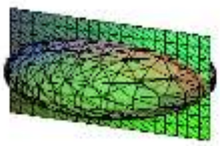
C- Sobre el plano **yz: x=k**

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{k^2}{a^2} \\ x=k \end{cases}$$

x= k=0

Si $1-\dfrac{k^2}{a^2}>0 \Rightarrow \dfrac{k^2}{a^2}<1 \Rightarrow |k|<a$

Elipses reales en planos paralelos al yz



_Si $1-\dfrac{k^2}{a^2}=0 \Rightarrow \dfrac{k^2}{a^2}=1 \Rightarrow |k|=a$ Elipses puntuales

Si $1-\dfrac{k^2}{a^2}<0 \Rightarrow \dfrac{k^2}{a^2}>1 \Rightarrow |k|>a$ Elipses Imaginarias. →

En particular si en la ecuación del elipsoide se tiene a=b=c qu

$x^2+y^2+z^2=r^2$, que es la ecuación de una esfera de radi

<u>Definición</u>: Una **esfera** es el conjunto de todos los puntos **P** del espacio tridimensional que equidistan de un punto fijo llamado *centro* (c). El *radio* (r) de la esfera denota una distancia fija al centro de la misma.

En el caso de que el *centro* (c) de la esfera fuera un punto **P(x_0; y_0; z_0)** en lugar del origen. Su ecuación será:

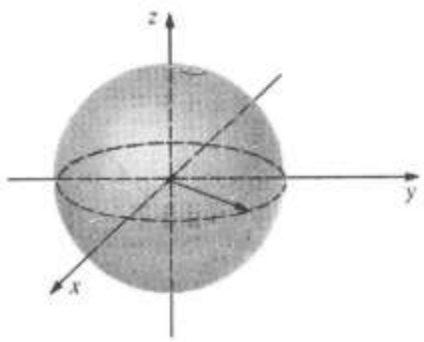
$$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2}$$

Esta ecuación representa una esfera con centro en **P(x_0; y_0; z_0)** y radio **a**.

Traza de la superficie

Cortadas por el plano coordenado	Obtenemos la traza de:
xy (z = 0)	$x^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow$ **Circunferencia**
xz (y = 0)	$x^2 + z^2 = a^2 \Rightarrow$ **Circunferencia**
yz (x = 0)	$y^2 + z^2 = a^2 \Rightarrow$ **Circunferencia**

La figura resume las trazas en los planos coordenados y proporciona una gráfica característica.



- Si **a** $\neq$ **b**, pero **a = c**, el **elipsoide es de revolución**. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$
- Si el centro del elipsoide es el punto **P(x_0; y_0; z_0)** y sus ejes son paralelos (//) a los coordenados, la ecuación es:

$$\boxed{\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1}$$

Es un **Elipsoide** con centro en **P(x_0; y_0; z_0).**

HIPERBOLOIDES DE UNA Y DOS HOJAS

HIPERBOLOIDE DE UNA HOJA

La gráfica de una ecuación de la forma:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1}$$

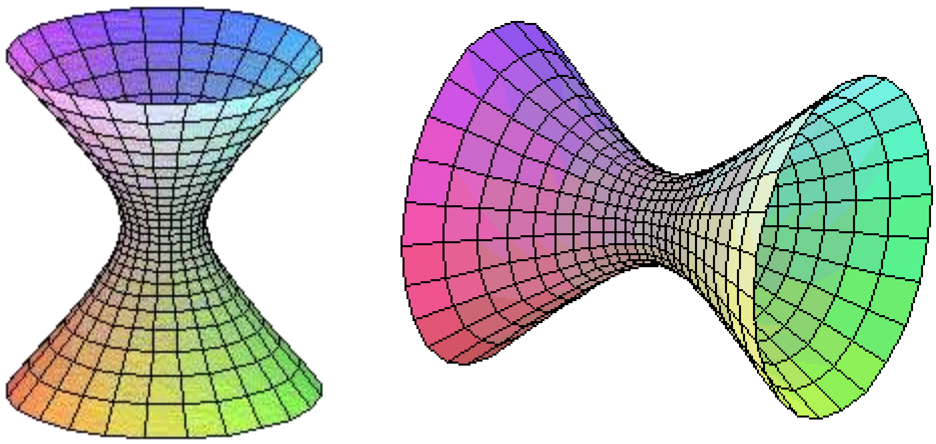
a > **0**; **b** > **0**; **c** > **0**

Es un **Hiperboloide de una hoja** con centro en el origen.

La cuádrica que obtenemos es el **Hiperboloide de una hoja** en el caso de que el *signo de uno de lo coeficientes tengan signo negativo y las otras dos con signo positivo.*

Si **a = b**, la superficie cuádrica es el **Hiperboloide de revolución de una hoja**.
Las secciones paralelas al plano **xy** son *Elipses*, excepto en el caso del *Hiperboloide de revolución* en el que son *circunferencias*.

Un ejemplo real



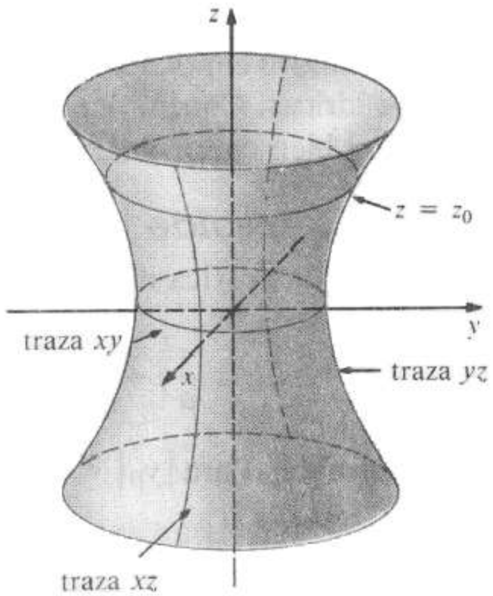
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Traza de la superficie

- En este caso, analizaremos la primera de las ecuaciones. Con un plano **z = x$_0$**, paralelo (//) al plano **xy**, corta la superficie en secciones transversales elípticas (ó circulares, si a = b). La elipse más pequeña, $z_0 = 0$, corresponde a la traza en el plano xy.

Cortadas por el plano coordenado	Obtenemos la traza de:
xy (z = 0)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow$ **Elipse**
xz (y = 0)	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \Rightarrow$ **Hipérbola**
yz (x = 0)	$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \Rightarrow$ **Hipérbola**

En la figura se presenta un resumen de las trazas y una gráfica característica de la ecuación:



Un método para graficar el **Hiperboloide de una hoja** aproximadamente es determinar el *eje principal de desarrollo*, que vendrá dado por el término negativo (-) de la ecuación.

Secciones con planos paralelos a los coordenados

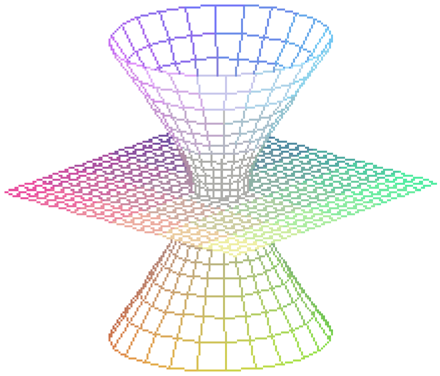
Los cortes del Hiperboloide de una hoja por planos paralelos a los coordenados son curvas cónicas (hipérbolas y elipses). Se supone que el Hiperboloide de una hoja está centrado en el origen de coordenadas y tiene la ecuación: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

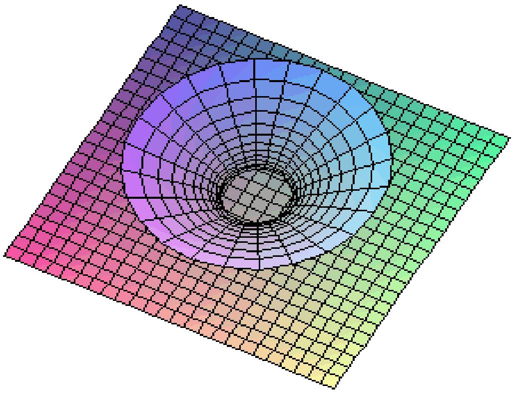
A- Sobre el plano xy: z=k

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2} \\ z = k \end{cases}$$

Siempre $1+\frac{k^2}{c^2}>0$ Elipses reales en planos paralelos al xy. La elipse de menores semiejes será para z=0.

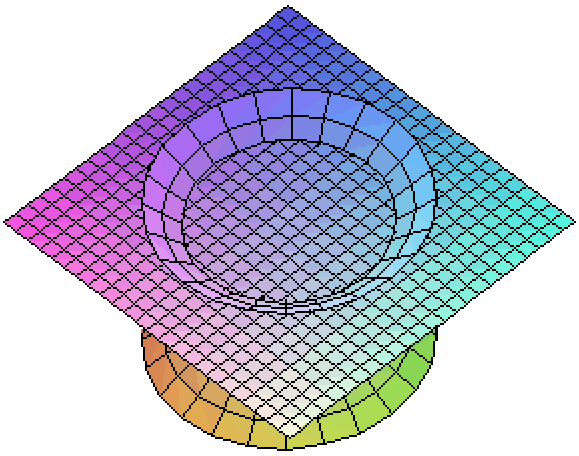
Corte con plano z=k=0 . Se obtiene la elipse de garganta

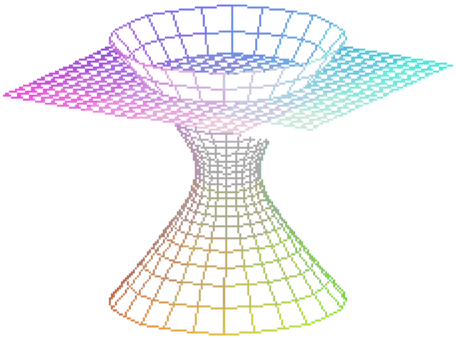




.

Cortes por planos z =k para k>0





B- Cortes sobre el plano yz: x =k

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{k^2}{a^2} \\ x=k \end{cases}$$

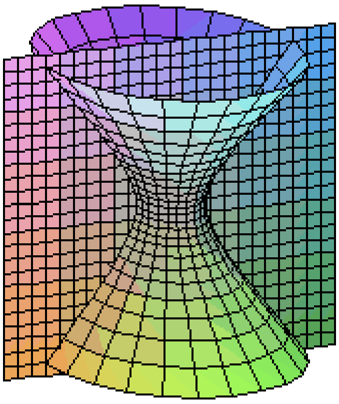
Dividiendo ambos términos en $1-\frac{k^2}{a^2}$,obteniendo la ecuación de una hipérbola:

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2(1-\frac{k^2}{a^2})}-\frac{z^2}{c^2(1-\frac{k^2}{a^2})}=1 \\ x=k \end{cases}$$

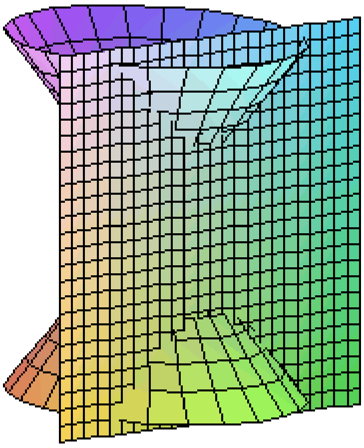
Esta hipérbola tendrá **eje real y** si $1-\frac{k^2}{a^2}>0$, es decir si $|k|<a$.

La hipérbola tendrá **eje real z** si $1-\frac{k^2}{a^2}<0$, es decir si $|k|>a$

Se tendrá asíntotas si $1-\frac{k^2}{a^2}=0$, esto sucederá cuando $|k|=a$



Para $|k|$ <a, en este caso k=0



Para $|k|$ >a

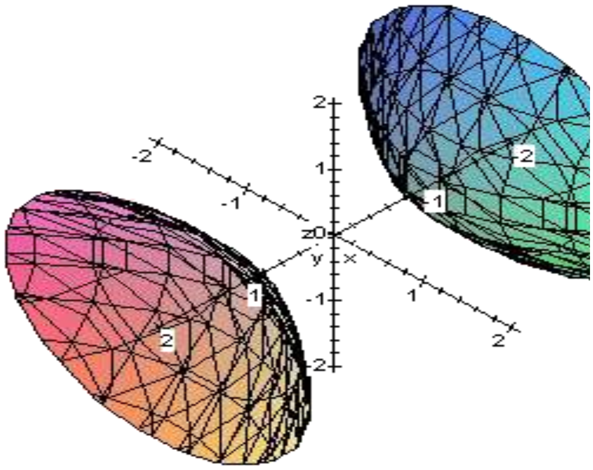
Cortes por planos y =k
El corte es una hipérbola como la del caso anterior donde los papeles de x e y se han intercambiado. Además el Hiperboloide de una hoja es una superficie doblemente reglada puesto que contiene a las dos familias de rectas.

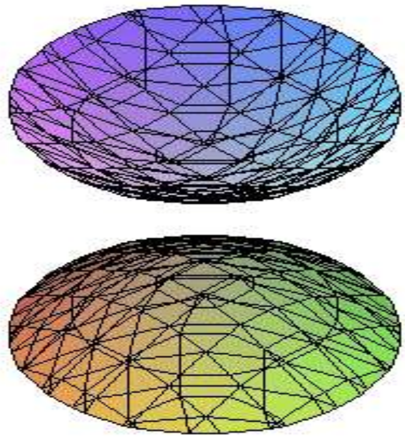
HIPERBOLOIDE DE DOS HOJAS

Su ecuación es de la forma:

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

La orientación dependerá de que variable presenta signos positivos





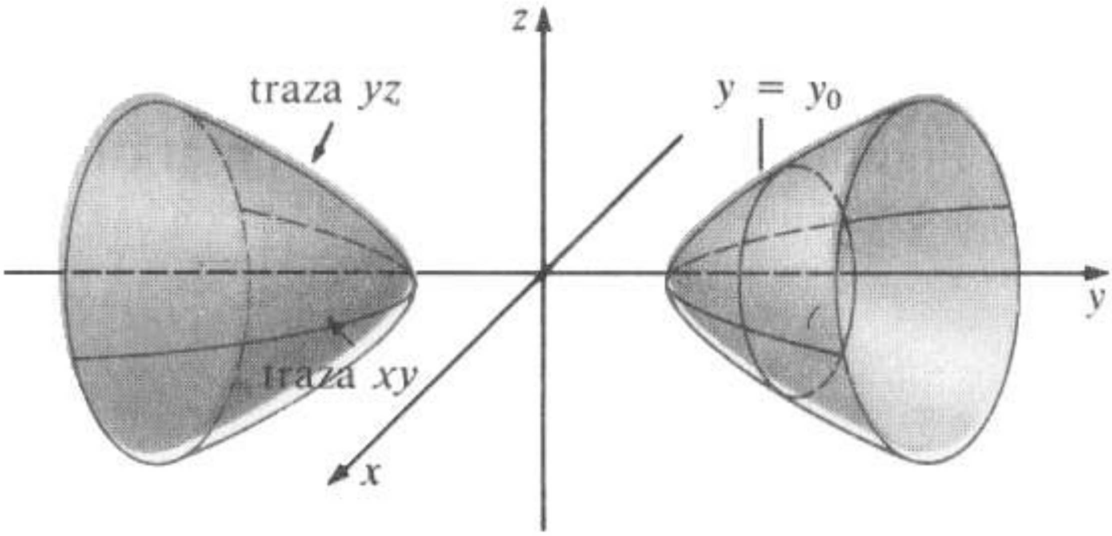
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad\qquad -\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

<u>Traza de la superficie</u>

- Las secciones paralelas a los planos **xy** e **yz** son *<u>Hipérbolas</u>*.
- Las secciones paralelas al plano **xz** son *<u>Elipses</u>*; excepto en el caso del *<u>Hiperboloide de dos hojas de revolución</u>* en el que son *<u>Circunferencias</u>*.

Cortadas por el plano coordenado	Obtenemos la traza de:
xy (z = 0)	$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow$ **Hipérbola**
xz (y = 0)	**Ninguna**
xz (y > 0)	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \Rightarrow$ **Elipses**
yz (x = 0)	$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \Rightarrow$ **Hipérbola**

En la figura se presenta un resumen de las trazas y una gráfica característica de la ecuación:



$$\boxed{-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1}$$

Hiperboloide de dos hojas

Un método para graficar un **Hiperboloide de dos hojas** aproximadamente es determinar el *eje principal de desarrollo*, que vendrá dado por el término (+) de la ecuación.

<u>Secciones con planos paralelos a los coordenados</u>

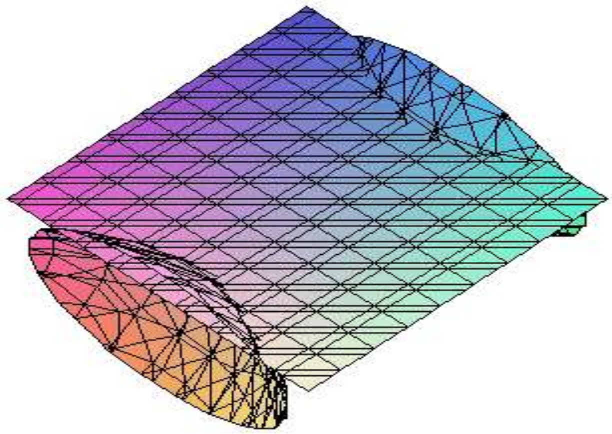
Los cortes de un hiperboloide de ecuación: $+\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ por planos paralelos a los coordenados son curvas cónicas

A- Cortes por planos z =k

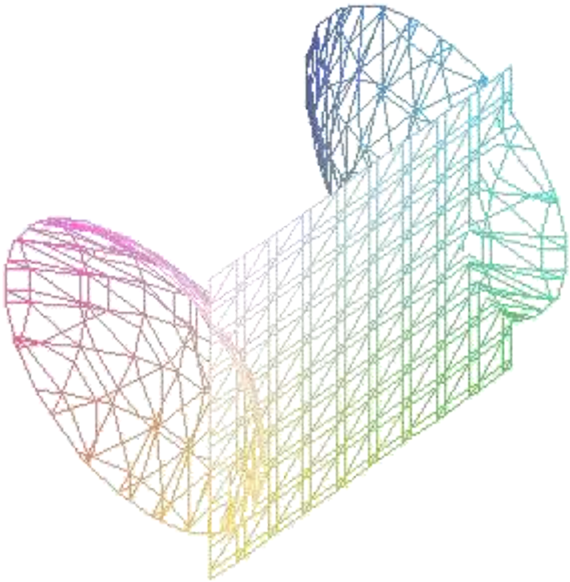
El desarrollo que sigue se ha hecho utilizando la primera de las ecuaciones

$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{k^2}{c^2}\\ z=k\end{cases}$ esta intersección da una hipérbola con eje real x en un plano xy, esta hipérbola

será $\frac{x^2}{a^2(1+\frac{k^2}{c^2})}-\frac{y^2}{b^2(1+\frac{k^2}{c^2})}=1$



Corte por planos *y* = k
El resultado es análogo al anterior intercambiando los papeles de ***y*** y ***z***



$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 + \dfrac{k^2}{b^2} \\ y = k \end{cases}$$ esta intersección da una hipérbola con eje real x en un plano xz, esta hipérbola será

$$\frac{x^2}{a^2(1+\frac{k^2}{b^2})} - \frac{z^2}{c^2(1+\frac{k^2}{b^2})} = 1$$

C- Cortes por planos yz: x =k

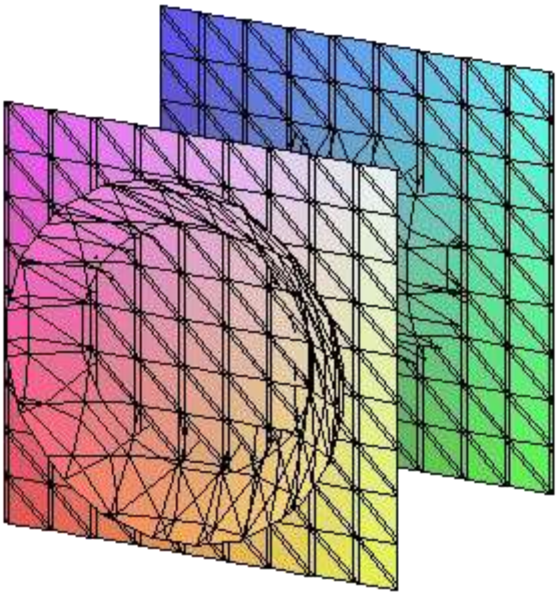
Se multiplica ambos miembros de la igualdad por -1 y se dejan las variables a la izquierda y las constantes a la derecha se tiene la siguiente ecuación:

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = \dfrac{k^2}{a^2} - 1 \\ x = k \end{cases}$$ Ecuación que representa una elipse

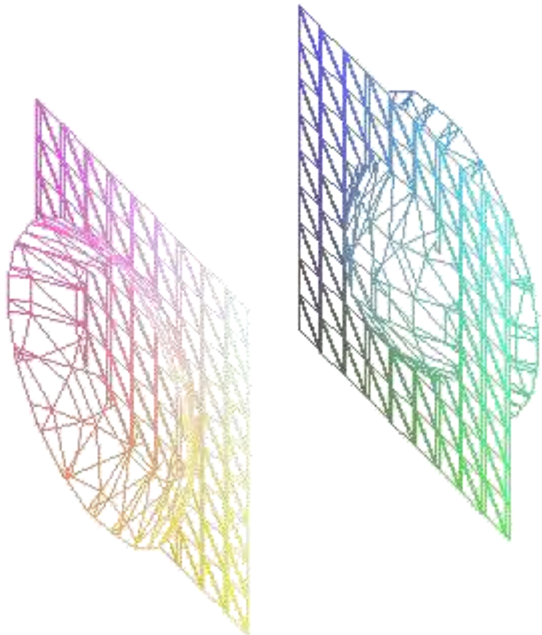
Si |k| > a, entonces la curva intersección resulta ser una elipse real.

Si |k| = a, entonces la curva intersección será una elipse puntual (el plano es tangente a la superficie).

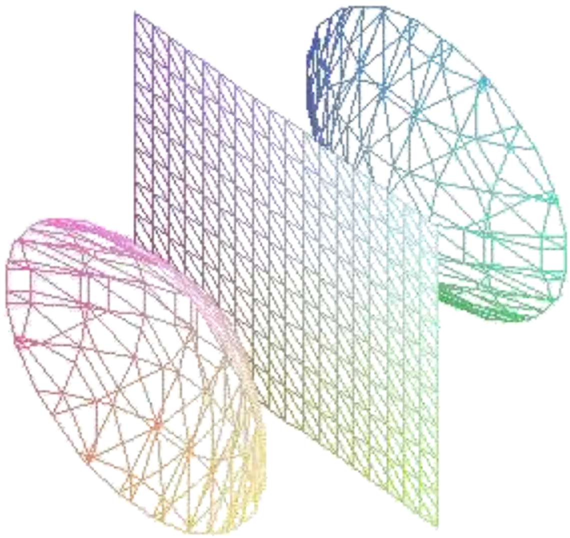
Si |k| < a, entonces la intersección será una elipse imaginaria (no hay intersección e real entre la superficie y el plano).



X=|k| > a



X=|k| > a

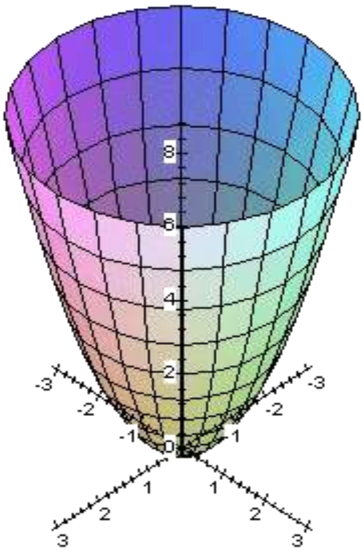


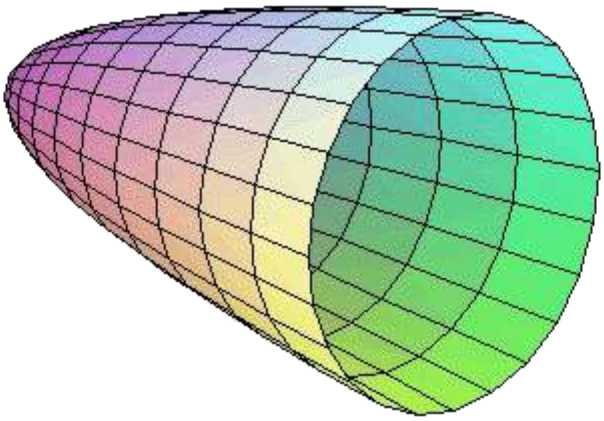
(**x=k= *0***)

PARABOLOIDE

a) PARABOLOIDE ELIPTICO

Su ecuación es de la forma : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=cz$ La orientación del Paraboloide elíptico dependerá de la variable que aparece lineal.





$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

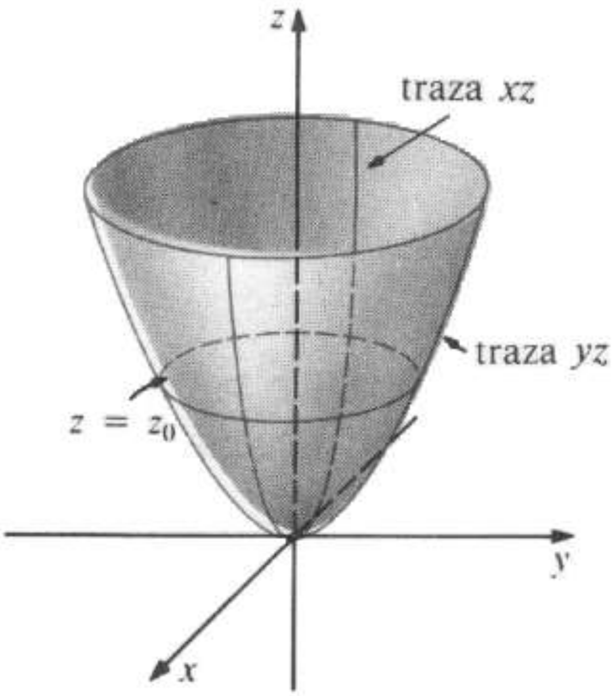
$$y = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}$$

Traza de la superficie

- Las secciones obtenidas por los planos **z = k** son *Elipses*, cuyas dimensiones van aumentando a medida que el plano se aleja del plano **xy**.
- Las secciones correspondientes a los planos paralelos a los coordenados **xz** o **yz** son *Parábolas*.
- Si **c** > **0** la cuádrica está, toda ella, por encima del plano **xy**.
- Si **c** < **0** está toda ella por debajo de dicho plano **xy**.

Cortadas por el plano coordenado	Obtenemos la traza de:
xy (z = 0)	**(0; 0) $\Rightarrow$ Punto**
Si z > 0	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz \Rightarrow$ sí $a \neq b \Rightarrow$ **Elipses** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz \Rightarrow$ sí $a = b \Rightarrow$ **Circunferencias**
xz (y = 0)	$\frac{x^2}{a^2} = cz \Rightarrow$ **Parábola**
yz (x = 0)	$\frac{y^2}{b^2} = cz \Rightarrow$ **Parábola**

En la figura se presenta un resumen de las trazas y una gráfica característica de la ecuación:



<u>Secciones con planos paralelos a los coordenados</u>

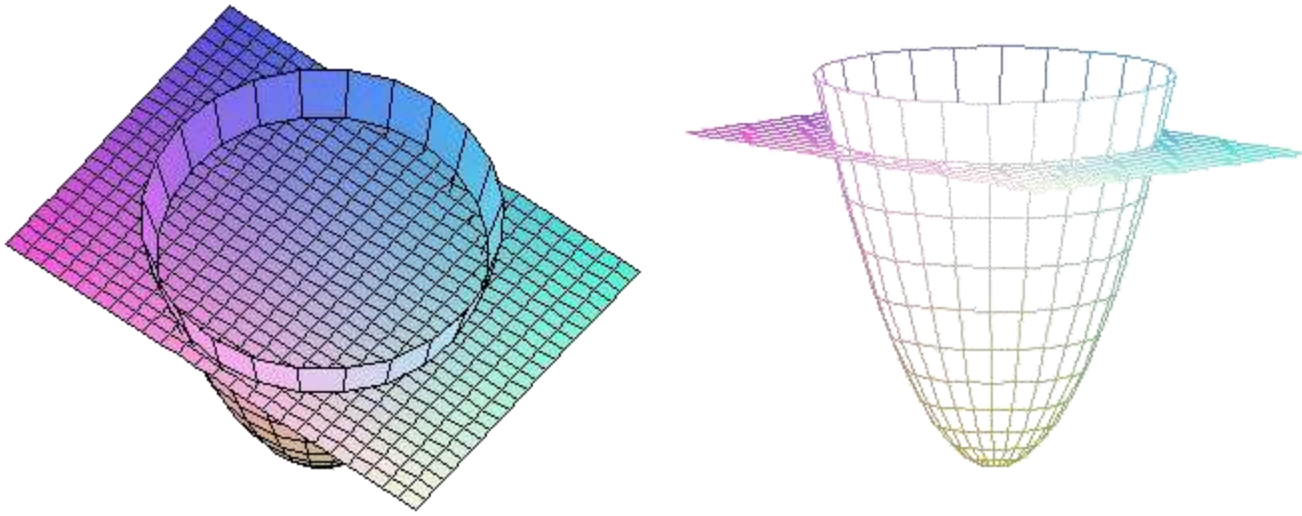
Los cortes del paraboloide por planos paralelos a los coordenados son curvas cónicas,

Cortes por planos *z* = k

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = ck \\ z = k \end{cases}$$

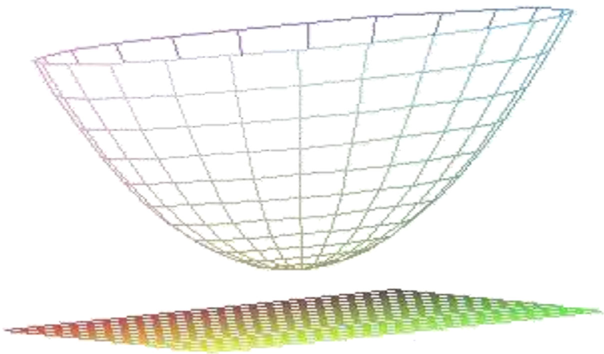
si k > 0, entonces la curva intersección resulta ser una elipse de semiejes proporcionales a ***a*** y ***b*** con ecuación $\dfrac{x^2}{a^2ck} + \dfrac{y^2}{b^2ck} = 1$

si k = ***0*** la intersección se reduce a un punto, siendo la superficie cuádrica tangente al plano en dicho punto.



(k > ***0***)

si k < ***0***, entonces no existe intersección.



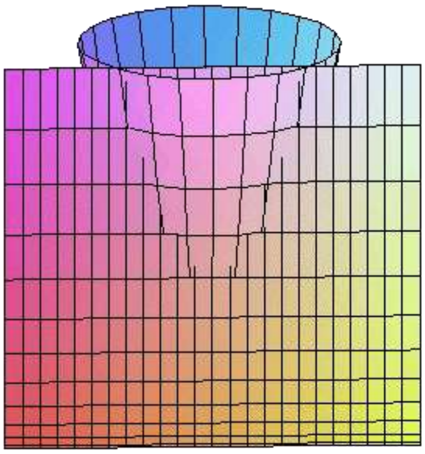
(k < ***0***)

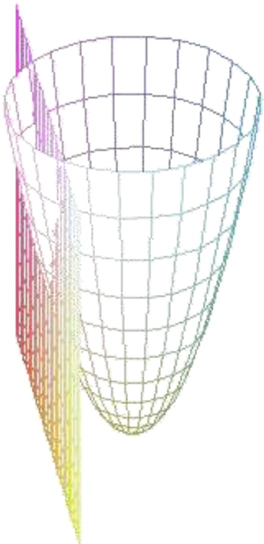
Corte por planos xz: *y =k* o **por planos yz: *x =k*** las curvas intersección son parábolas

Se analizará para x=k

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} = cz - \dfrac{k^2}{a^2} \\ x = k \end{cases}$$ La intersección de la superficie con el plano x=k dará siempre una parábola de

ecuación $y^2 = cb^2(z - \dfrac{k^2}{c.a^2})$





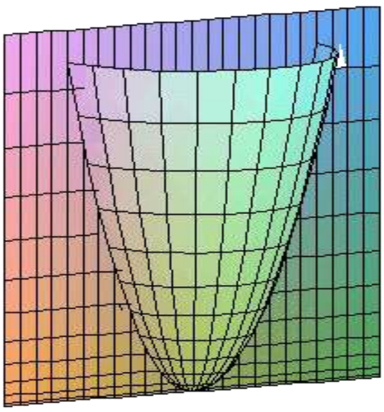
(corte por plano x =k >0)

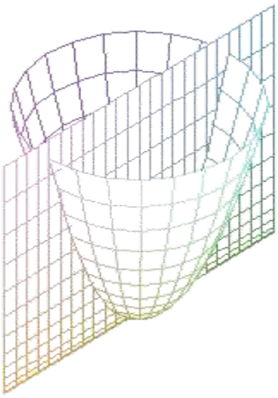
C- De igual forma para y=k se obtiene siempre parábola

Se analizará para y=k

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} = cz - \dfrac{k^2}{b^2} \\ y = k \end{cases}$$ La intersección de la superficie con el plano y=k dará siempre una parábola de

ecuación $x^2 = ca^2(z - \dfrac{k^2}{c.b^2})$



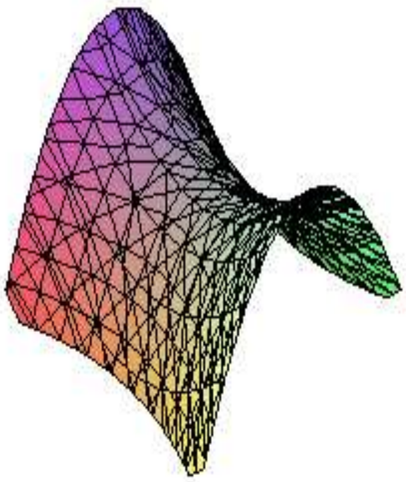


y = k = 0

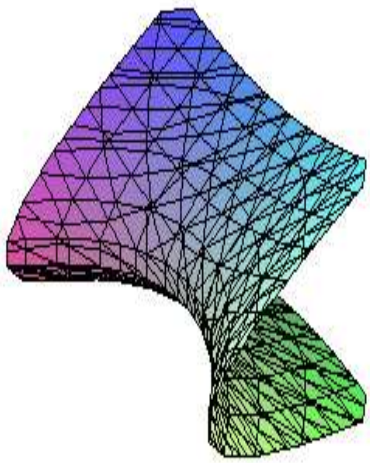
PARABOLOIDE HIPERBÓLICO

Esta superficie responde a una ecuación del tipo:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=cz$$



$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=cz$$



$$-\frac{z^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}=ax$$

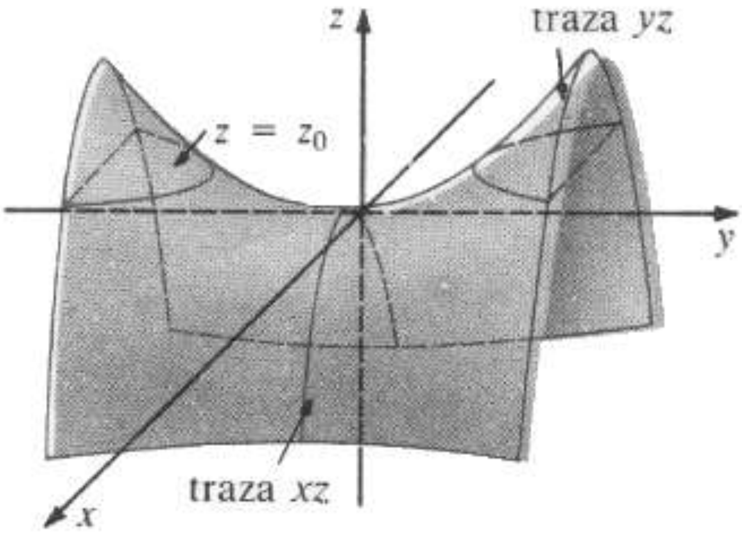
El paraboloide hiperbólico es una superficie doblemente reglada por las familias de rectas.

Traza de la superficie

- Las secciones por los planos **z = k** (donde **k** > **0**) son *Hipérbolas* cuyos ejes real e imaginario son paralelos respectivamente a los ejes coordenados **x** e **y**; y cuyas dimensiones aumentan a medida que lo hace **k**.
- Si **k** < **0**, los ejes reales e imaginarios son paralelos a los **xy** respectivamente.
- Si **k = 0**, la sección degenerada es el par de rectas: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ (5to Factoreo)
- Las secciones correspondientes a los planos **y = k** son *Parábolas* abiertas hacia abajo.
- Las secciones correspondientes a **x = k** son *Parábolas* abiertas hacia arriba.

Cortadas por el plano coordenado	Obtenemos la traza de:
Si z > 0	**Hipérbolas** ⇒ cuyos ejes transversales son **//** al eje **y**.
xy (z = 0)	$\mathbf{y = \pm \frac{a}{b} x}$ ⇒ **Rectas**
Si z < 0	**Hipérbolas** ⇒ cuyos ejes transversales son **//** al eje **x**.
xz (y = 0)	$\mathbf{-\frac{x^2}{b^2} = cz}$ ⇒ **Parábola**
yz (x = 0)	$\mathbf{\frac{y^2}{a^2} = cz}$ ⇒ **Parábola**

En la figura se presenta un resumen de las trazas y una gráfica característica de la ecuación:



Un método para graficar el **Paraboloide Hiperbólico** aproximadamente es determinar el *eje principal de desarrollo*, que vendrá dado por el término positivo de la ecuación.

<u>Secciones con planos paralelos a los coordenados</u>

Los cortes del paraboloide por planos paralelos a los coordenados son curvas cónicas:

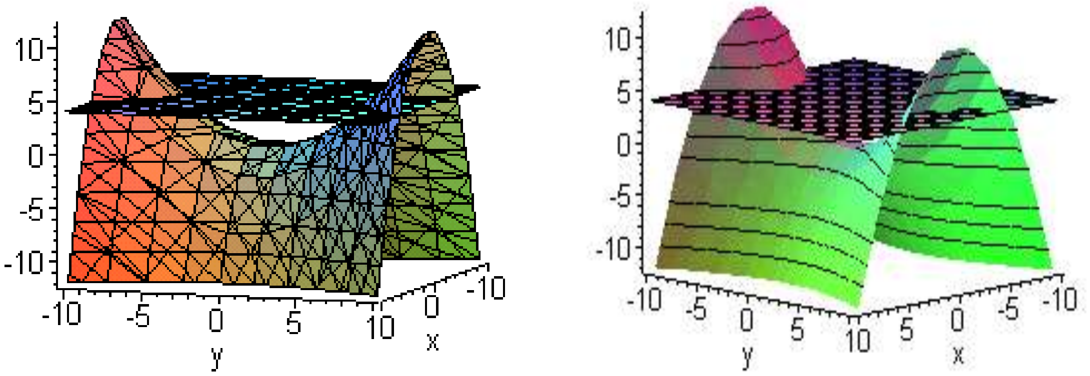
- **Cortes por planos *z =k***

$$\begin{cases} -\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = ck \\ z = k \end{cases}$$

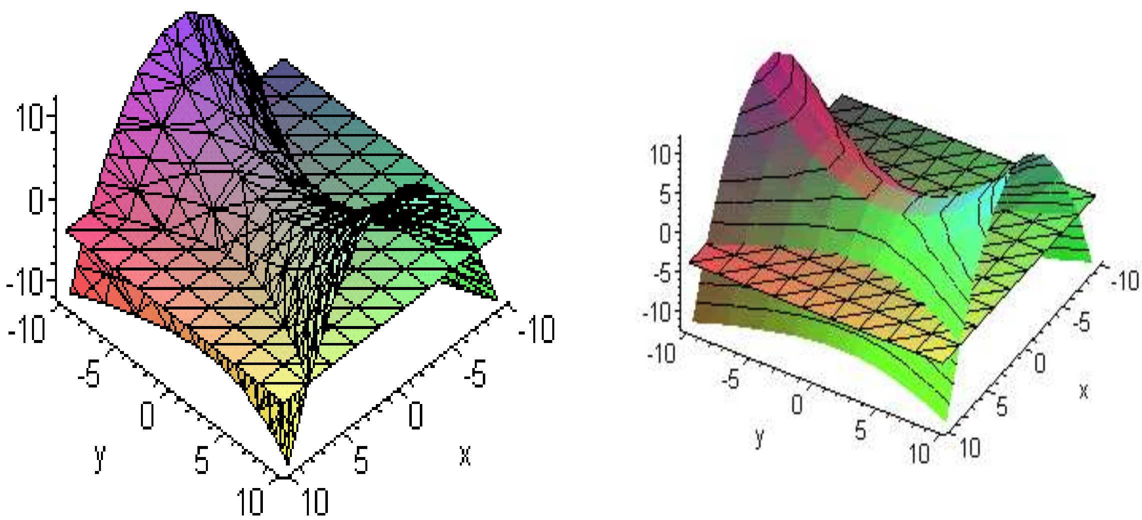
si k = ***0***, entonces la curva intersección es un par de rectas (asíntotas),

si k>o la hipérbola tendrá eje real paralelo al eje y, como se muestra en las dos primeras figuras,

si k<0 entonces la hipérbola tiene eje real paralelo al eje x como se muestra en las dos figuras correspondiente.

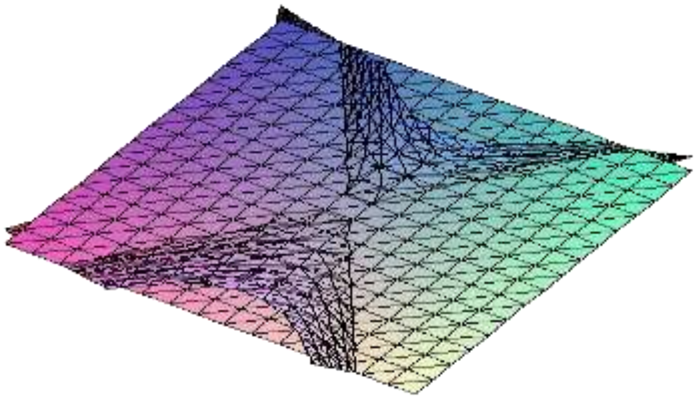


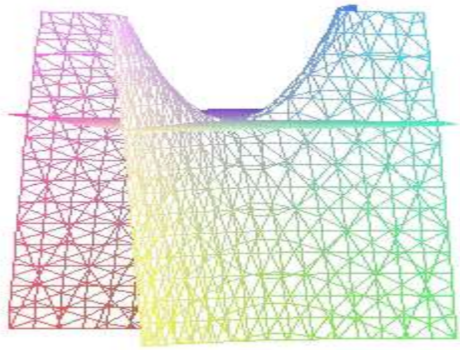
(k > 0)



(k < 0)

si k = 0, entonces la intersección es un par de rectas que se cortan en el origen de coordenadas



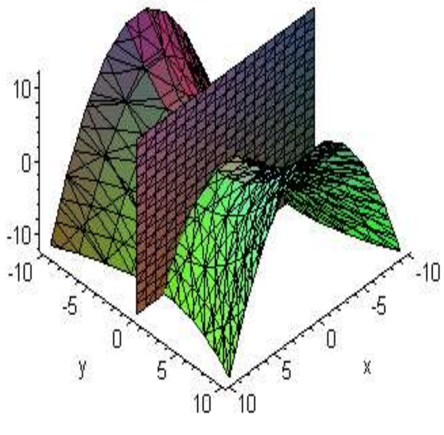


(k = 0)

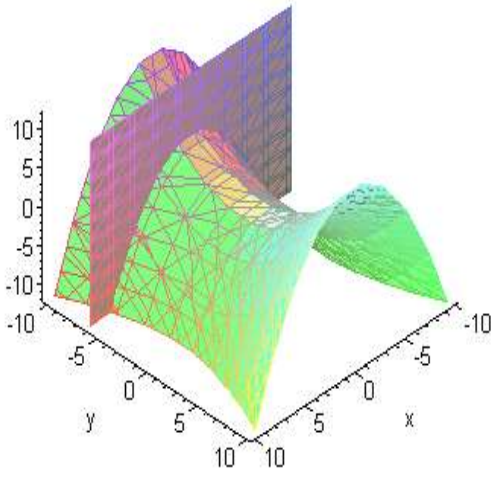
Cortes por planos *y* = k

La curva intersección son parábolas: $\begin{cases} -\dfrac{x^2}{a^2} = cz - \dfrac{k^2}{b^2} \\ y = k \end{cases}$ ecuación de una parábola trasladada

$$\begin{cases} x^2 = -a^2 c(z + \dfrac{k^2}{cb^2}) \\ y = k \end{cases}$$



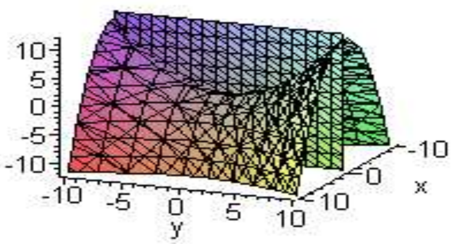
y=k=0



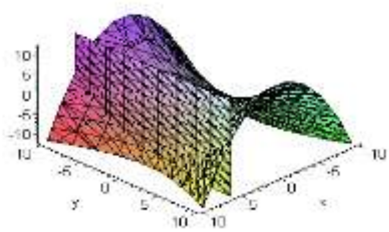
y=k<0

Cortes por planos x = k La curva intersección son parábolas: $\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} = cz + \dfrac{k^2}{a^2} \\ x = k \end{cases}$

Es la ecuación de una parábola trasladada $\begin{cases} y^2 = b^2 c(z + \dfrac{k^2}{ca^2}) \\ x = k \end{cases}$



X=k=0



x=k>0

CONOS Y CILINDROS

CONO RECTO

La gráfica de una ecuación de la forma:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}.}$$

a > **0**; **b** > **0**; **c** > **0** Es un **Cono Recto Elíptico** (ó **Circular** si **a = b**)

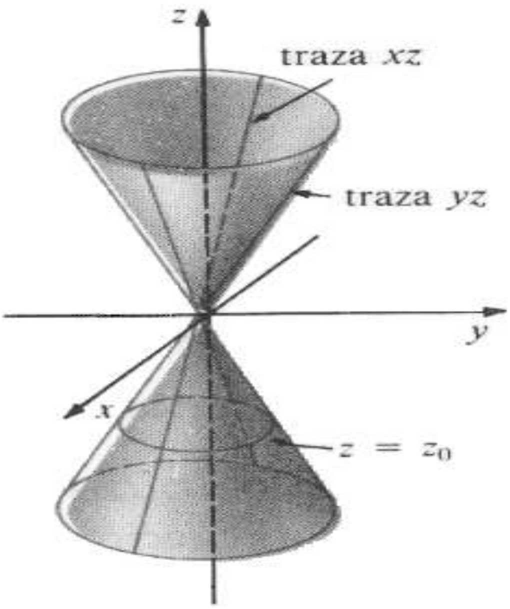
Esta superficie se puede considerar generada por la rotación de la recta **y = kx** alrededor del eje **z**.
$\boxed{x^2 + y^2 - c^2z^2 = 0}$ → Es como la **I** $\boxed{Ax^2 + By^2 + Cz^2 = D}$ pero en ésta → **A = B**; y **Cz²** es negativo y **D**

Traza de una superficie

- Las secciones horizontales producidas por los planos paralelos al plano coordenado **xy** son *Elipses*, excepto cuando **a = b** que son *Circunferencias*.
- Las secciones correspondientes a planos paralelos (//) al **yz** o al **xz** son *Hipérbolas*.

Cortadas por el plano coordenado	Obtenemos la traza de:
xy (z = 0)	**(0; 0)** $\Rightarrow$ **Punto**
xz (y = 0)	$z = \pm \dfrac{c}{a}x$ $\Rightarrow$ **Rectas**
Si y > ó < 0	**Hipérbolas** $\Rightarrow$ cuyos eje transversal son **//** al eje **z**.
yz (x = 0)	$z = \pm \dfrac{c}{b}x$ $\Rightarrow$ **Rectas**
Si x > ó < 0	**Hipérbolas** $\Rightarrow$ cuyos eje transversal son **//** al eje **z**.

En la figura se presenta un resumen de las trazas y una gráfica característica de la ecuación:

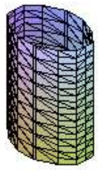
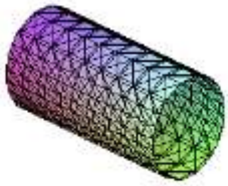
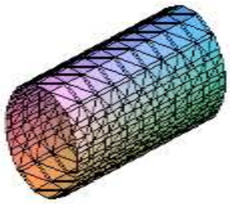


SUPERFICIES CILÍNDRICAS

En el *espacio bidimensional* la gráfica de $\mathbf{x^2 + y^2 = 1}$ es una *circunferencia con centro en el origen*. Sin embargo, en el *espacio de tres dimensiones* es posible interpretar la *gráfica del conjunto* como una **superficie**, que es el *cilindro circular recto*, o también llamada cilindro

Está generada por una recta que se desplaza paralelamente a otra fija y que se apoya constantemente en forma perpendicular a una curva también fija.
La recta móvil es la generatriz.
La curva fija es la directriz de la superficie en cuestión.
Una superficie cilíndrica cuya generatriz es paralela (//) a uno de los ejes coordenados y cuya directriz es una curva en el plano coordenado que es perpendicular a la generatriz, tiene la misma ecuación que la directriz.
En general una ecuación que contenga dos variables, si representa una curva en el plano de dichas variables, será la ecuación de una superficie cilíndrica recta cuyas generatrices son paralelas al eje de la variable faltante.

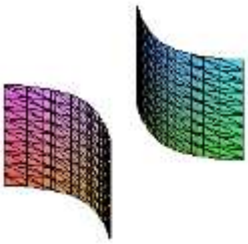
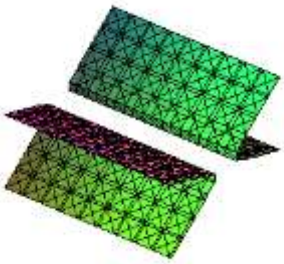
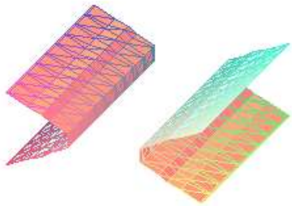
Cilindros elípticos:

		
Cilindro elíptico de generatrices paralelas al eje z. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	Cilindro elíptico de generatrices paralelas al eje y. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	Cilindro elíptico de generatrices paralelas al eje x. $\frac{z^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

Cilindros Parabólicos:

		
Cilindro parabólico de generatrices paralelo al eje x. $y^2=cz$	Cilindro parabólico de generatrices paralelo al eje y. $x^2=cz$	Cilindro parabólico de generatrices paralelo al eje z. $x^2=by$

Cilindros Hiperbólicos

		
Cilindro hiperbólico de generatrices paralelo al eje z. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	Cilindro hiperbólico de generatrices paralelo al eje y. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	Cilindro hiperbólico de generatrices paralelo al eje x. $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

Se analizara un cilindro elíptico de generatrices paralelas al eje x.
En el caso de un cilindro elíptico o circular, si la directriz es paralela al eje z las correspondientes ecuaciones son:

$a \neq b \Rightarrow$ Elipse $\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$ La ecuación del **Cilindro** es $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$

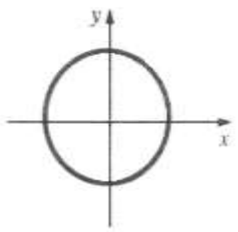
$a = b = r \Rightarrow$ Circunferencia $\boxed{x^2 + y^2 = r^2}$ La ecuación del **Cilindro circular** es $\Rightarrow$ $\boxed{x^2 + y^2 = r^2}$

<u>Traza de una superficie</u>

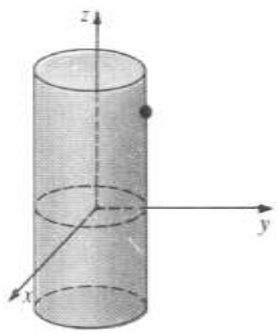
Cortados por el plano coordenado	Las trazas obtenidas:
Plano xy: **z = 0**	Elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
Plano yz: **x = 0**	Par de rectas paralelas **y =** $\pm b$
Plano xz: **y = 0**	Par de rectas paralelas: **x =** $\pm a$

<u>Traza de una superficie</u>

Circunferencia



Cilindro Circular



x e **y** están relacionadas por:
$x^2 + y^2 = r^2$
z es arbitraria.

(x; y; z)

<u>SUPERFICIES REGLADAS</u>

Las superficies cuádricas se pueden clasificar también en superficies regladas o no regladas.

Pueden ser simplemente regladas o doblemente regladas.

Una superficie cuadrica se dice **simplemente reglada** si por cada uno de sus puntos pasa una recta íntegramente contenida en ella. Ejemplo: cilindros y cono.

Una superficie se dice que es **doblemente reglada** si por cada uno de sus puntos pasan dos rectas íntegramente contenidas en la superficie. Por ejemplo, Paraboloide hiperbólico e Hiperboloide de una hoja.