UNIDAD Nº 3:
INTEGRALES

1- INTEGRALES INMEDIATAS

Dada $f(x)$ debemos encontrar una $F(x)$ tal que $F'(x)$ sea igual a f(x)

Si $F(x)$ es una función y se verifica que $F'(x)$ = f(x) entonces $F(x)$ **se llama PRIMITIVA de la función f(x).**

EJEMPLO Nº 1:

Encontrar la primitiva de $f(x)$ = x^2

$F(x) \rightarrow F'(x) = f(x) = x^2 \rightarrow \boxed{F(x) = \frac{x^3}{3}}$ ya que $\boxed{F'(x) = \frac{\cancel{3}x^2}{\cancel{3}} = x^2}$ función primitiva

También serán primitivas de x^2 las siguientes funciones:

$F_1(x) = \frac{x^3}{3} + 5$ ya que $\boxed{F'_1(x) = \frac{\cancel{3}x^2}{\cancel{3}} = x^2}$

$F_2(x) = \frac{x^3}{3} - 2$ ya que $\boxed{F'_2(x) = \frac{\cancel{3}x^2}{\cancel{3}} = x^2}$

Es decir, que puedo tener infinitas primitivas; porque son funciones que sólo difieren entre sí, en una constante.

CONCLUSIÓN:

Si $F(x)$ es primitiva de, entonces, se la denomina **INTEGRAL INDEFINIDA** y se la simboliza:

$\int f(x)\,dx = F(x) + C$ donde $F'(x)$ = f(x) donde C = constante de integración

Se podría decir inicialmente que la integración es la operación **inversa** a la derivación.

MÉTODOS DE INTEGRACIÓN: para todos los tipos se trata de conseguir una metodología que nos indique cual es la función denominada Primitiva F(x) que derivada nos dé la función integrando f(x)

INTEGRALES INMEDIATAS: teniendo en cuenta las reglas de derivación, se puede demostrar las siguientes propiedades para las integrales:

Las constantes como productos pueden sacarse fuera de la integral

$$\boxed{\int K\,.\,f(x)\,dx = K\int f(x)\,dx}$$

EJEMPLO $\rightarrow \int -2.x\,dx = -2\int x\,dx$

La suma algebraica de varios integrandos, es igual a la integral de cada uno de ellos, con sus respectivos signos

$$\boxed{\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx}$$

EJEMPLO $\rightarrow \int \left[\sqrt[3]{x^2} - \cos x + \frac{1}{x}\right]dx = \int x^{2/3}dx - \int \cos x\,dx + \int \frac{1}{x}dx$

REGLAS DE INTEGRACIÓN

1- Si $\boxed{\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C}$ para n $\neq$ -1

EJEMPLO $\rightarrow \int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + C$

2- Si $\boxed{\int x^{-1}dx = \int \frac{1}{x}dx = \ln x + C}$ para n = -1 (es el caso de excepción a la regla anterior)

3- Si $\boxed{\int \sqrt[n]{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{n}}dx = \frac{x^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1} + C}$

EJEMPLO $\rightarrow \int \sqrt{x}dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$

4- Si $\boxed{\int \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}}dx = \int \frac{1}{x^{\frac{m}{n}}}dx = \int x^{-\frac{m}{n}}dx = \frac{x^{-\frac{m}{n}+1}}{-\frac{m}{n}+1} + C}$

EJEMPLO $\rightarrow \int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \int \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}dx = \int x^{-\frac{2}{3}}dx = \frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} + C$

5- Si $\boxed{\int \frac{u'(x)}{u(x)}dx = \ln u(x) + C}$

EJEMPLO 1 $\rightarrow \int \frac{e^x}{e^x+4}dx = \ln(e^x+4)+C$

EJEMPLO 2 $\rightarrow \int \frac{1+\cos x}{x+sen\, x}dx = \ln(x+senx)+C$

EJEMPLO 3 $\rightarrow \int tg\, x\, dx = \int \frac{sen\, x}{\cos x}dx$ (multiplico 2 veces por (-1))

$-1\int \frac{(-1)\, sen\, x}{\cos x}dx = -\ln \cos x + C$

EJEMPLO 4 $\rightarrow \int \frac{dx}{x.\ln x} = \int \frac{1/x}{\ln x}dx = \ln(\ln x)+C$

6- Si $\boxed{\int f^n(x).f'(x)\,dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1}+C}$

EJEMPLO 1 $\rightarrow \int sen^5 x.\cos x\, dx = \frac{sen^6\, x}{6}+C$

EJEMPLO 2 $\rightarrow \int e^{2x}\, dx = \int e^x.e^x\, dx = \frac{e^{2n}}{2}+C$

EJEMPLO 3 $\rightarrow \int \frac{\ln x}{x}dx = \int \ln x \frac{1}{x}\, dx = \frac{(\ln x)^2}{2}+C$

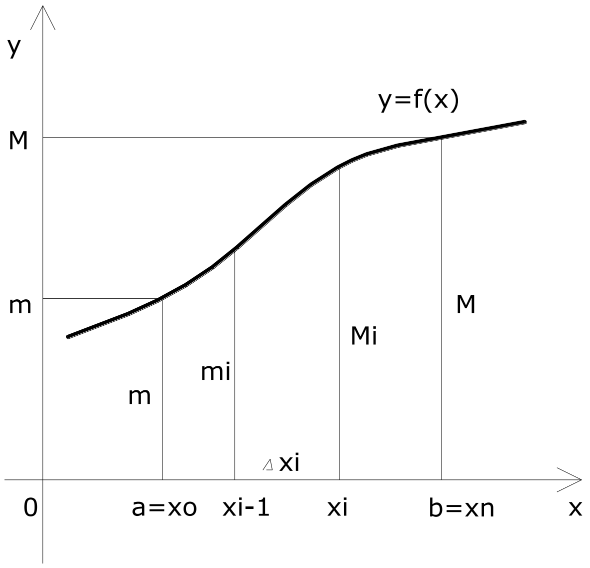
INTEGRACIÓN DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS SENCILLAS

$$\int sen\, x\, dx = -\cos x + C$$
$$\int \cos x\, dx = sen\, x + C$$
$$-\int sen\, x\, dx = \cos x + C \rightarrow pues\, (\cos x)' = -sen\, x$$
$$-\int \cos x\, dx = -sen\, x + C \rightarrow pues\, (-sen\, x)' = -\cos x$$
$$-\int \cot g\, x\, dx = -\int \frac{\cos x}{sen\, x}dx = -\ln sen\, x + C$$

<u>INTEGRAL DE RIEMANN</u>

Estudiaremos la Integral de Riemann (matemático alemán), que fue el primero en establecer la integral sobre bases aritméticas en lugar de geométricas.

Dada una función *y = f(x),* continua y acotada en un intervalo [a,b]
Nuestro problema consiste en calcular el área comprendida por la curva y el semieje *x* en el intervalo [a,b] .
Consideraremos un conjunto de puntos P = {a=x_0, x_1, x_2,......,x_n=b} , tal que a=x_0<x_1<x_2<....<x_n=b, a este conjunto se lo denomina **partición** del intervalo [a,b].
Llamaremos subintervalos $\Delta x_i = [x_i , x_{i-1}]$ o $\Delta x_i = [x_{i-1}, x_i]$, La longitud del subintervalo Δx_i es $long\,\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$



Norma de la partición

Es la mayor longitud de los subintervalos Δx_i , y se simboliza: $\|P\| = \max \Delta x_i$

Observación:

La P puede realizarse de cualquier forma. Sólo debe cuidarse $x_0 \equiv a$ y $x_n \equiv b$. Se practica con Δx_i iguales, para facilitar los cálculos.

Como *f(x)* es continua y acotada en [a,b] entonces existen dos números n y M tales que :
$m \le f(x) \le M \quad \forall\ x \in [a,b]$
(m= menor, M= mayor valor que toma la función en [a,b])
f(x) también está acotada en todos los subintervalos Δx_i , es decir existen m_i y M_i, tales que:

$$m_i \le f(\xi_i) \le M_i \ \forall \xi i \in [x_{i-1}, x_i] \quad (1)$$

Suma inferior:

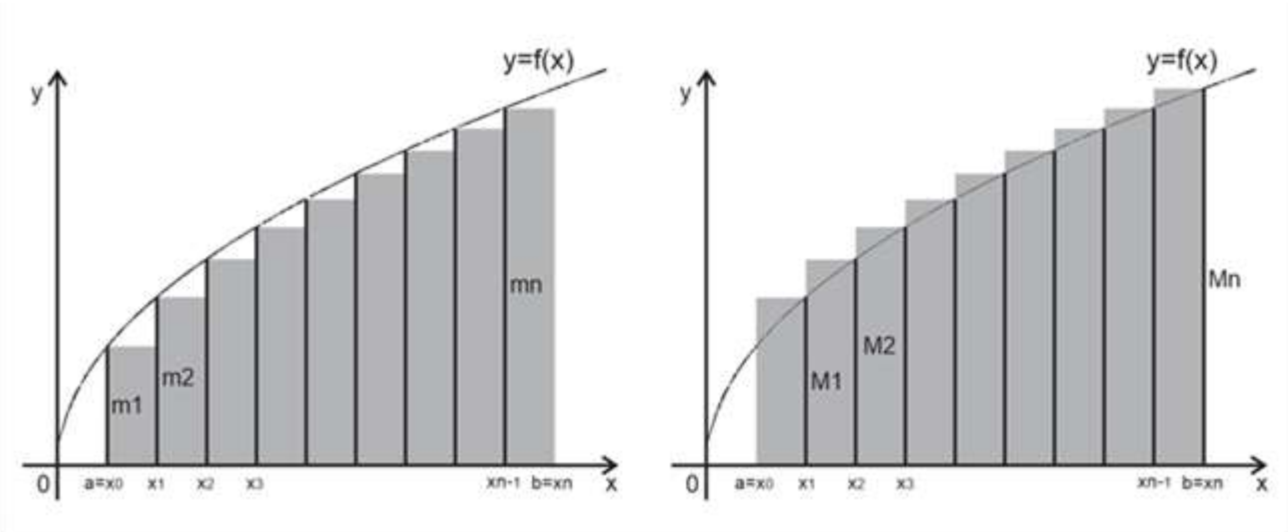
Considera la suma de los productos de las áreas de los rectángulos cuyas bases son Δx_i y alturas m_i
Geométricamente: Representa el área por defecto (A_Q)

Suma superior:

Considera la suma de los productos de las áreas de los rectángulos cuyas bases son Δx_i y alturas M_i

$$\overline{S}(f;P) = \sum_p M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1}) = M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + M_3(x_3 - x_2) + ...M_n(x_n - x_{n-1}) = \therefore \overline{S}_p = \overline{S}$$

Geométricamente: Representa el área por exceso (A_R)



Por (1) se tiene que: $\underbrace{\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i}_{Area\ total\ por\ defecto} \leq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \leq \underbrace{\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i}_{Area\ total\ por\ exceso} \quad x \in [a,b]$

Para disminuir los errores por defecto y por exceso, se consideraran mas puntos x_i dentro del intervalo [a,b] , a esto se le denomina refinamiento de la partición P del intervalo [a,b]. Si consideramos que la norma de la partición $\|P\| = \max \Delta x_i \to 0$ implica infinitos puntos x_i ($n \to \infty$).

Con esto logramos que el área por defecto aumente su valor y el área por exceso disminuya hasta que finalmente el error cometido tienda a cero, por lo tanto:

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \leq \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \leq \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x$$

Como el primer y tercer miembro de la desigualdad son iguales (cuando $\Delta x_i \to 0$ entonces $m_i = M_i$), luego los tres miembros nos da un número al que llamaremos A y lo simbolizaremos:

$$A = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

La expresión anterior se lee: integral definida entre a y b de *f(x)* diferencial *x*
El resultado de la integral definida es un número que representa el área comprendida por la curva *y=f(x)* y el eje *x* en el intervalo [a,b] en las unidades consideradas para representar la función.

PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA:

1. $\int_a^b K.f(x)dx = K\int_a^b f(x)dx$
2. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
3. Si $a < b \wedge \forall x \in [a,b]$ es a<b $\quad f \leq g \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

4. Si m es un ínfimo y M el supremo de f(x) en $[a,b] \Rightarrow m(a-b) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(a-b)$
5. Valor medio cálculo integral

Si $f(x) \in C$ en $[a,b] \Rightarrow \exists \xi \in (a,b) / \int_a^b f(x)dx = f(\xi)\,(a-b)$

6. Sean a<c<b, tres números reales

Entonces se cumple: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

SEGUNDO TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INTEGRAL: REGLA DE BARROW

$$\boxed{\Rightarrow \int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)}$$

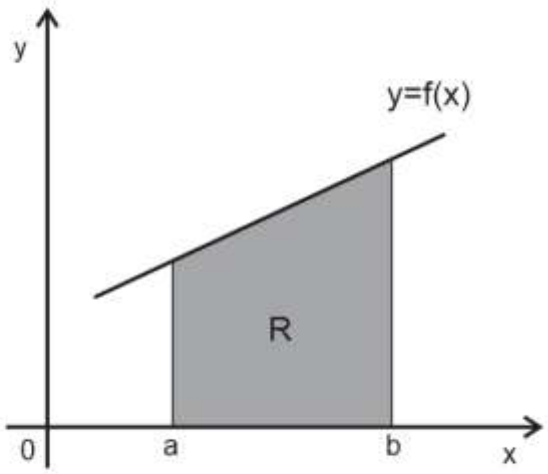
ÁREAS PLANAS CÁLCULO EN COORDENADAS CARTESIANAS. ÁREAS ENTRE DOS CURVAS. ÁREA LIMITADA POR UNA CURVA CERRADA.

1- CÁLCULO DE ÁREAS PLANAS

Como se vio en la definición de integral definida si la función es positiva en todo el intervalo [a,b] , la $\int_a^b f_{(x)}dx$ da el área comprendida entre la curva representada por la función y = $f_{(x)}$, las rectas x = a, x = b y el eje de las x (Región correspondiente R por encima del eje de las x)

Si la función es negativa en todo el intervalo, la $\int_a^b f_{(x)}dx$ va a ser negativa porque la región correspondiente R queda por debajo del eje de las x, pero el área es la medida correspondiente a R y en consecuencia es un número positivo y por lo tanto se puede decir:

$$\boxed{A = \int_a^b \left|f_{(x)}\right| dx}$$



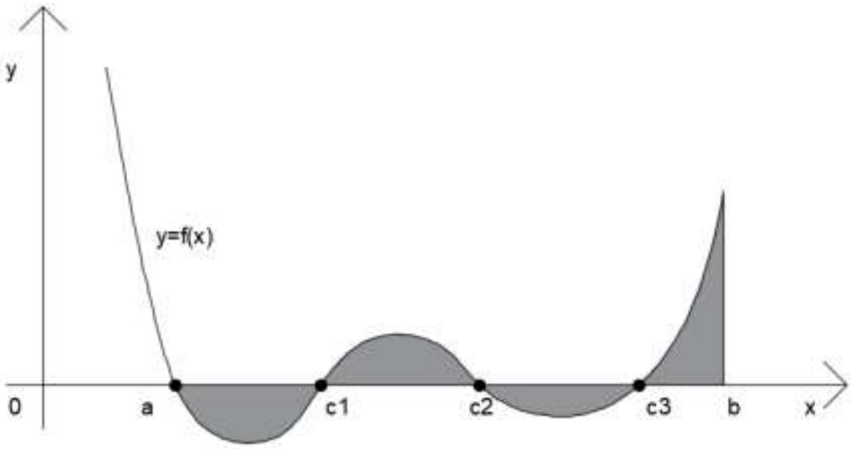
Ejemplo 1:

Hallar el área comprendida entre la curva $f_{(x)} = -(x)^2$, el eje x y la rectas x=1 x=3

$$A = \int_1^3 \left| -(x)^2 \right| dx = \left| -\frac{(x)^3}{3} \right|_1^3 = \left| -\frac{3^3}{3} - \left(-\frac{1^3}{3} \right) \right| = \left| -\frac{26}{3} \right| = \frac{26}{3} \text{ unidades de área}$$

Si se desea hallar el área de una región como la del gráfico siguiente, en la que parte de la misma queda por encima del eje x y parte por debajo, se debe plantear dos o mas integrales considerando el o los puntos donde la curva corta al eje de las x.

$$\text{Área} = \int_a^{c_1} \left| f_{(x)} \right| dx + \int_{c_1}^{c_2} \left| f_{(x)} \right| dx + \int_{c_2}^{c_3} \left| f_{(x)} \right| dx + \int_{c_3}^{b} \left| f_{(x)} \right| dx$$



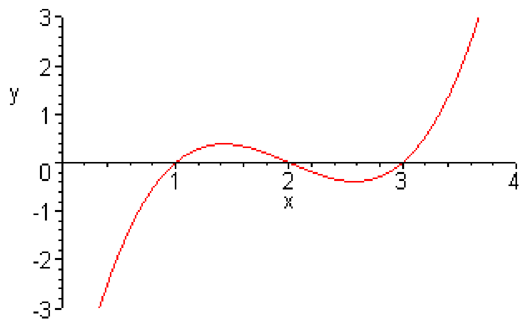
Ejemplo 2:

Determinar el área de la región limitada por la curva $f_{(x)} = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ y el eje x, que se indica en la siguiente figura.

En primer lugar se debe determinar las abscisas donde el polinomio corta al eje x; estos valores se obtienen encontrando las raíces del polinomio

$f_{(x)} = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

Estas son: $x_1=1$, $x_2=2$ y $x_3=3$ como se ve en la gráfica de la función



A= $\left| \frac{x^4}{4} - \frac{6}{3}x^3 + \frac{11}{2}x^2 - 6x \right|_1^2 + \left| \frac{x^4}{4} - \frac{6}{3}x^3 + \frac{11}{2}x^2 - 6x \right|_2^3$ y aplicando la regla de Barrow

se tiene:

$$A = \left|\left(\frac{2^4}{4} - 2.2^3 + \frac{11}{2}2^2 - 6.2\right) - \left(\frac{1^4}{4} - 2.2^3 + \frac{11}{2}2^2 - 62\right)\right| +$$

$$+\left|\left(\frac{3^4}{4} - 2.3^3 + \frac{11}{2}3^2 - 6.3\right) - \left(\frac{2^4}{4} - 2.2^3 + \frac{11}{2}2^2 - 6.2\right)\right| = \left|-2 - \left(-\frac{9}{4}\right)\right| + \left|\left(-\frac{9}{4}\right) - (-2)\right| = \frac{1}{2}$$ Lueg

o el área es: $A = \frac{1}{2}$ unidades de área.

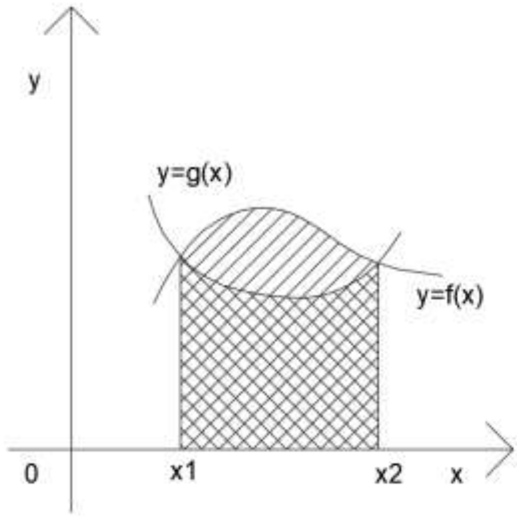
2- ÁREA ENTRE DOS CURVAS

Sean $f_{(x)}$ y $g_{(x)}$ funciones continuas en el intervalo [a,b]. Entonces el área A de la región comprendida entre sus gráficas en el intervalo está dada por:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} \left|f_{(x)} - g_{(x)}\right| dx.$$

Donde las coordenadas indicadas en la figura, a = x_1 y b = x_2 se encuentran resolviendo la intersección entre las dos funciones es decir haciendo $f_{(x)} = g_{(x)}$

Y despejando los valores de x que la satisfacen

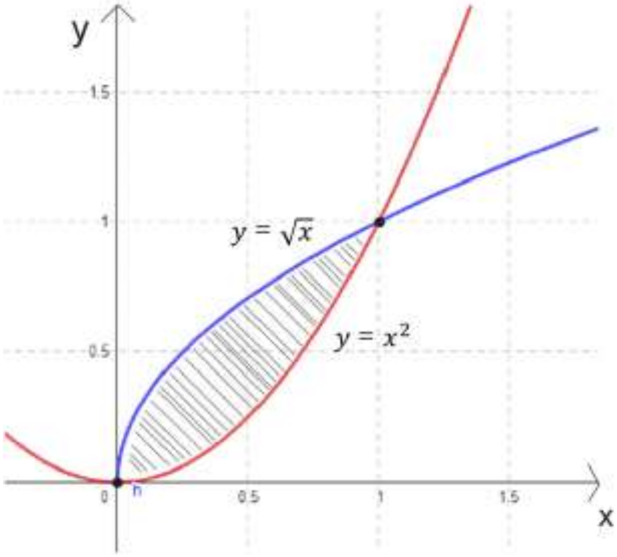


Ejemplo 3 Calcular el área comprendida entre: $\begin{cases} f_{(x)} = x^2 \\ g_{(x)} = \sqrt{x} \end{cases}$

Encontramos primero los puntos de intersección: $f_{(x)} = g_{(x)}$

$$x^2 = \sqrt{x}\ ; \Rightarrow x = x^4 \Rightarrow x^4 - x = 0 \Rightarrow x(1 - x^4) = 0; x_1 = 0; x_2 = 1$$

Graficaremos:



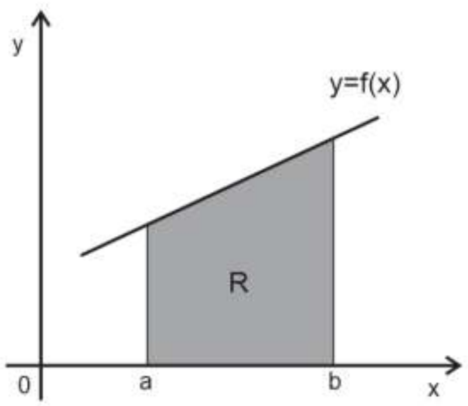
$$A=\int_0^1\left|\sqrt{x}-x^2\right|dx=\int_0^1\left|x^{\frac{1}{2}}-x^2\right|dx=$$

$$\left|\left.\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1\right|=\left|\frac{1^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{1^3}{3}-\left(\frac{0^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{0^3}{3}\right)\right|=$$

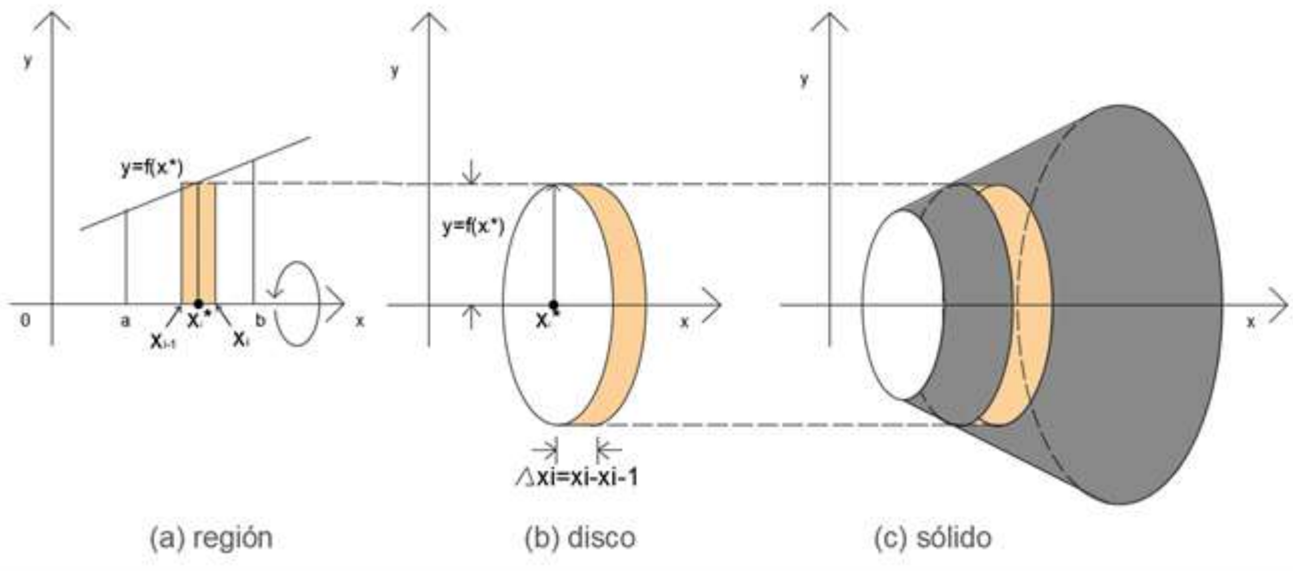
$\left|\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right|=\frac{1}{3}$ unidades de área

VOLÚMENES DE SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN. CÁLCULO DE VOLÚMENES ENGENDRADOS POR CURVAS DADAS EN COORDENADAS CARTESIANAS.

Si hacemos girar un punto, alrededor de un eje, genera una línea curva (circunferencia).
De igual forma si se considera una curva representada por la función $f_{(x)}$ continua en el intervalo [a,b] y se hace girar el arco de la misma , desde el punto $A(a,f_{(a)})$ hasta el punto $B(b,f_{(b)})$, alrededor del eje x(por ejemplo), se genera un sólido de revolución cuyo volumen se puede calcular por medio de una integral definida.



Sea R la región limitada por la gráfica de la función continua: $y=f_{(x)}$, el eje x, y las rectas: x = a y x = b, como se muestra en la siguiente figura.
Se evalúa el volumen V del sólido de revolución resultante al hacer girar esa región en torno al eje x. Sea P una partición de [a,b] y sea x_i un valor cualquiera perteneciente al i-ésimo subintervalo
$[x_{i-1}, x_i]$. Cuando el elemento rectangular de ancho $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ y altura $f_{(xi^*)}$ se hace girar alrededor del eje x, se genera un disco, como se muestra en la siguiente grafica.



Recordemos que el volumen de un cilindro circular recto, o disco, de radio *r* y altura *h* es:
V= (área de la base). (altura)= $\pi r^2 h$, de modo que para el cilindro en estudio será: $r = f_{(\xi i)}$, h=Δx_i, el volumen del disco será: $\Delta V_i = \pi\left[f_{(\xi i)}\right]^2 \Delta x_i$. Dado que para una partición con n subintervalos produce n discos , luego el volumen aproximado del sólido será la suma de los volúmenes de los discos $\sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = \sum_{i=1}^{n} \pi\left[f_{(\xi i)}\right]^2 \Delta x_i$

Para encontrar el volumen exacto del sólido se debe hacer que la **Norma de la partición** tienda a cero $\|P\| \to 0$, que es equivalente a decir que n$\to\infty$, y el volumen exacto queda:

$$V = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi\left[f_{(\varsigma i)}\right]^2 \Delta x_i = \pi\int_a^b \left[f_{(x)}\right]^2 dx$$

$$\boxed{V = \pi\int_a^b \left[f_{(x)}\right]^2 dx}$$

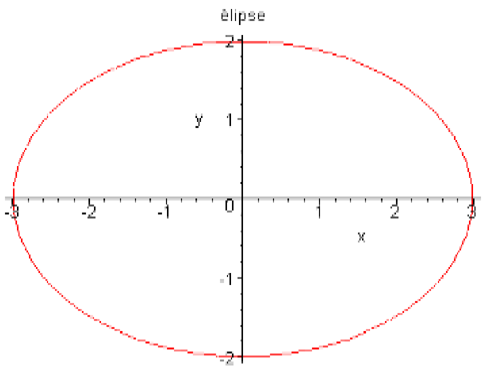
Ejemplo 4:

Encontrar el volumen V del sólido generado al hacer girar la función $y = \sqrt{x}$ alrededor del eje x entre los valores de las abscisas x = 0 y x = 4.

$$V = \pi\int_0^4 x\,dx = \pi\left.\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = \pi\frac{4^2}{2} = 8\pi \text{ unidades de volumen}$$

Ejemplo 5:

Calcular el volumen del elipsoide de revolución generado al hacer girar la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ alrededor del eje x.



Se despeja la variable y^2 de la ecuación de la elipse: $y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$. Se reemplaza en la expresión de volumen de revolución, se multiplica por dos porque solo se integra la mitad derecha de la elipse:

$$V = 2\pi\int_0^a b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)dx = 2\pi b^2\int_0^a \left(a^2 - x^2\right)/\,a^2 dx$$

$$V = 2\pi\frac{b^2}{a^2}\left(a^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg]_0^a = 2\pi\frac{b^2}{a^2}\frac{2}{3}a^3 = \frac{4}{3}\pi b^2 a$$

Caso particular

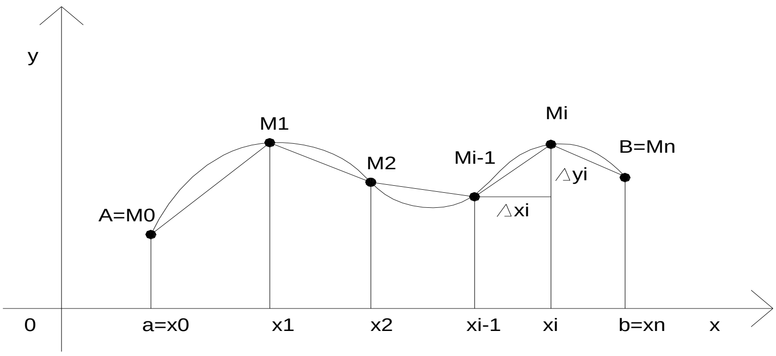
$a = 3,\ b = 2 \qquad V = \frac{4}{3}\pi.4.3 = 16\,\pi$ unidades de volumen

NOCIONES DE CÁLCULO DE LONGITUD DE UN ARCO DE CURVA Y DE ÁREAS DE SUPERFICIE DE REVOLUCIÓN ENGENDRADAS POR CURVAS DADAS EN COORDENADAS CARTESIANAS.

1- <u>LONGITUD DE CURVA</u>

Se llama longitud de arco de curva AB, al limite de la longitud de la poligonal inscripta en el arco, cuando aumenta el número de lados.

Dado el arco de curva representado en la siguiente figura por la función $f_{(x)}$ en el intervalo [a,b], si se determina sobre el arco AB los puntos A, M_1, M_2,..., M_i, … , M_{n-1}, B cuyas abscisas son respectivamente x_0= a, x_1, x_2,..., x_i, ...,x_{n-1}, x_n=b, y se trazan las cuerdas AM_1, M_1M_2, ... , $M_{n-1}B$ se obtendrá una poligonal cuya longitud será un valor aproximado de la longitud del arco.



Si se considera el límite de L_p cuando la longitud de cada $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ tiende a 0 y dicho límite existe y es finito, entonces por definición de integral definida tendremos el valor de la longitud del arco AB.

Si la función $f_{(x)}$ además de ser continua tiene derivada continua en el intervalo [a,b], este límite existe y se puede probar que la expresión para determinar la longitud de un arco de curva es:

$$\boxed{L=\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx}$$

Ejemplo 6: Calcular la longitud de la circunferencia $x^2+y^2=r^2$

$$y=\sqrt{r^2-x^2}=\left(r^2-x^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$y'=\frac{1}{2}\left(r^2-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}.(-2x)=\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

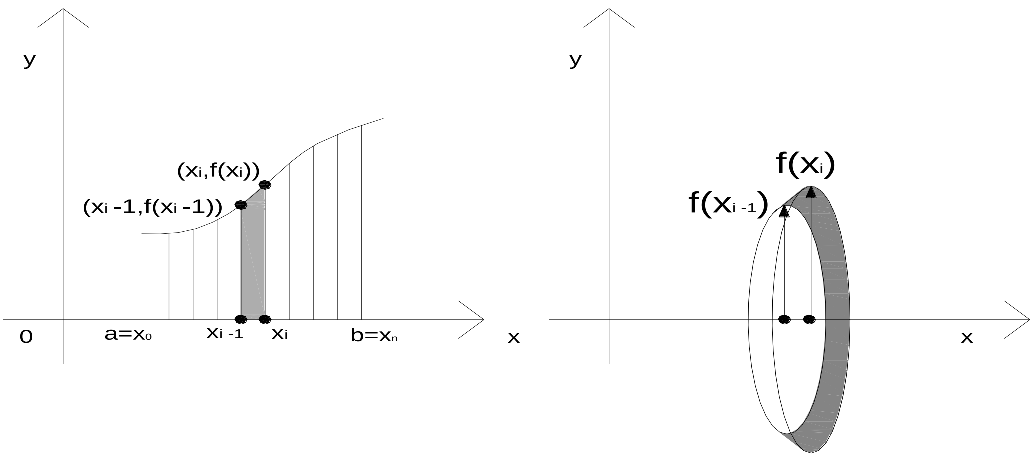
Si integraremos entre 0 y r, obtendremos la cuarta parte de la longitud de la circunferencia, es por ello que la integral se premultiplica por 4.

$$L=4\int_0^r\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}dx=4\int_0^r\sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2}}dx=4\int_0^r\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}dx=4r\int_0^r\frac{\frac{dx}{r}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2}}dx$$

L= 4r arc sen $\left.\frac{x}{r}\right]_0^r$ = 4r arc sen $\frac{r}{r}$- 0) = 4r $\frac{\pi}{2}$ $=2\pi r$

2- ÁREA DE SUPERFICIE DE REVOLUCIÓN

Se vio cómo se calcula el volumen de un sólido de revolución generado por la rotación de curva alrededor de un eje, de forma similar se puede calcular el área lateral de dicho sólido, suponiendo como se muestra en la figura que el arco de curva gira alrededor del eje de las x, y que la curva es rectificable.



En la Fig. anterior, el área lateral del tronco de cono será: Ai = $2\pi f_{(x_i^*)}L_i$, donde $x_{i-1} < x_i^* < x_i$,siendo Li la longitud de la apotema, cuya expresión de esta es: $L_k = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1+y'^2}\,dx$; trabajando a partir de estos conceptos se llega a la expresión que nos permite determinar el área de una superficie de revolución:

$$\boxed{A_{SR} = 2\pi \int_a^b y.\sqrt{1+y'^2}\,dx}$$

EJEMPLO 7

Calcular el área de la superficie del cono, generado por la rotación alrededor del eje x, de la recta y = 3x; desde x =0 a x =1

Se debe derivar para reemplazarla en la expresión del área de la superficie de revolución: y'=3

$$A_{SR} = 2\pi \int_0^1 3x.\sqrt{1+(3)^2}\,dx = 6\pi\sqrt{10}\int_0^1 x\,dx = 6\pi\sqrt{10}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 3\pi\sqrt{10}(1^2-0) = 3\pi\sqrt{10}$$

$A_{SR} = 3\pi\sqrt{10}$ Unidades de área.

EJERCITACIÓN

---

1) Calcule las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int dx$

b) $\int 2dx$

c) $\int x^6 dx$

d) $\int x^{-2} dx$

e) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

f) $\int \frac{1}{x^3} dx$

g) $\int 5x^{3/2} dx$

h) $\int 6\cos x dx$

i) $\int \frac{senx}{\pi} dx$

j) $\int 2e^{x} dx$

k) $\int \frac{7}{x} dx$

l) $\int 5t^{3} - 2\, dt$

m) $\int \frac{5\sqrt{x} + x}{x^{2}} dx$

n) $\int x^{2} . \sqrt{x} dx$

ñ) $\int 7\, sen\, t + 5e^{t}\ dt$

o) $\int sen\, \pi\, dx$

p) $\int e + x^{2} dx$

q) $\int (x+3)^{2}\, dx$

r) $\int 2^{x}\, dx$

2) Resolver las siguientes integrales definidas

a) $\int_{1}^{3} x^{2} dx$

b) $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^{3}}$

c) $\int_{0}^{2\pi} \operatorname{sen} x . dx$

d) $\int_{0}^{1} (x^{2} + 3x) dx$

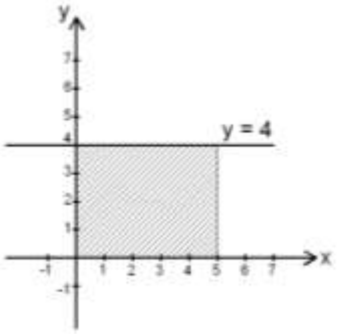
e) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x . \cos x . dx$

f) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} - \operatorname{tg} x . dx$

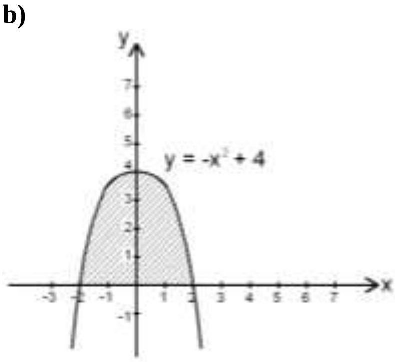
Cálculo de Área bajo la Curva:

1. Calcule el área sombreada

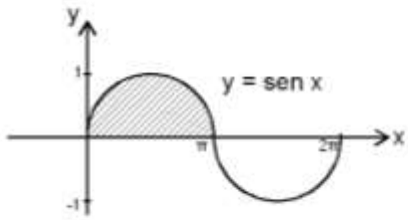
a)



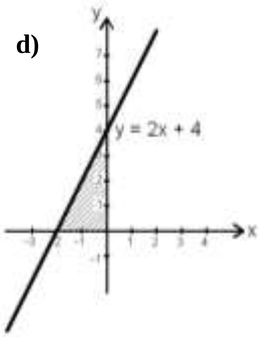
b)



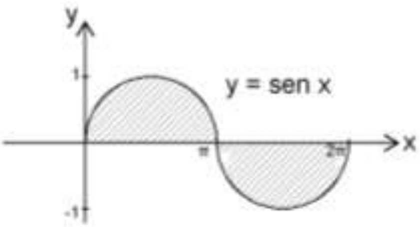
c)



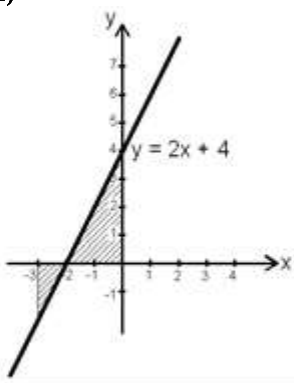
d)



e)



f)



2. Calcular el área comprendida entre la curva f(x), el eje x y las rectas que se indican. Graficar

a) $\begin{cases} y = 3x + 2 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = 1/x \\ x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = x^3 \\ x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ x = 2 \\ x = 4 \end{cases}$

f) $\begin{cases} y = \cos x \\ x = 0 \\ x = 3\pi/2 \end{cases}$

g) $\begin{cases} y = -x^2 + 2 \\ x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$

h) $\begin{cases} y = -5/2\, x + 5 \\ x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$

i) $\begin{cases} y = x^2 + 3x\, dx \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$

Cálculo de Área entre Curvas:

3. Calcular el área comprendida entre las siguientes curvas. Graficar.

a) $\begin{cases} y = x \\ y = -x^2 + 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} f_{(x)} = x^2 + 2 \\ g_{(x)} = x + 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} f_{(x)} = -x^2 + 4x \\ g_{(x)} = x^2 - 2x \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = \sqrt{5x} \\ y = x \end{cases}$

e) $\begin{cases} y = x^3 \\ y = 4x \end{cases}$

<u>Cálculo de Longitud de Arco:</u>

1. Calcular la longitud de arco de las siguientes curvas en los intervalos que se indican. Graficar.

    a) $f_{(x)} = 2x$, entre $x = 0$ y $x = 3$

<u>Cálculo de Área de Superficie de Revolución:</u>

1. Calcular el área de la superficie de revolución generada por la curva $f_{(x)}$ al girar alrededor del eje x en los intervalos que se indican. Graficar.

    a) $f_{(x)} = 3x$, en $[1,2]$

    b) $f_{(x)} = x + 2$, en $[-1,1]$